Université de Rennes

Analyse et Probabilités 3

Feuille d'exercices n°4

Intégrales généralisées

Exercice n°1

Vrai ou Faux : L'intégrale généralisée converge :

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \qquad b) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} \qquad c) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad d) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

Exercice n°2

Calculer les intégrales suivantes en prenant soin de justifier la convergence :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin x\,\mathrm{d}x \qquad I_5 = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \ \ (n \in \mathbb{N}) \qquad I_6 = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{\cos(2x)+\cos(3x)-2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice n°3

Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^1 \ln(t)\,\ln\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} \ln(x)\,\mathrm{d}x\,,\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x}\,\mathrm{d}x\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$I_7 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(x^2-1)^{\alpha}}\,\mathrm{d}x\,,\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)\ln|x|}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \qquad I_9 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice n°4

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ convergent. Les calculer en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice n°5 *(Intégrales de Bertrand)*

1) Montrer que $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(\ell n\, t)^{\beta}}$ converge si et seulement si $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

2) Montrer que $\displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}|\ell n\, t|^{\beta}}$ converge si et seulement si $\begin{cases} \alpha < 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

Exercice n°6 *(Examen de juin 2019)*

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice n°7

Soient $f : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}\left(1+\dfrac{\sin t}{\ln t}\right)$ et $g : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$.

Montrer que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ et que les intégrales sont de natures différentes.

Exercice n°8

Montrer la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\left(t^2\sin t-\cos\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice n°9

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a,+\infty[$. On suppose que $\int^{+\infty} f$ converge et que $\int_a^{+\infty} f = 0$. Montrer que f est identiquement nulle sur $[a,+\infty[$.

Exercice n°10

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$. On suppose que $\int^{+\infty} f$ converge. Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Exercice n°11

1) Montrer que $\int_1^x e^t \ln t\ \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x \ln x$. **2)** Montrer que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.

Exercice n°12 *(Contrôle de décembre 2020)*

1) Démontrer que $\ln(1+t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln t$.

2) Soit $x>1$ un réel. Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

4) Démontrer que $\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Exercice n°13 *(Contrôle de décembre 2022)*

1. Démontrer la convergence de l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$$
2. Soit $a>0$ un réel. Démontrer l'égalité
$$\int_0^a \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^{\mathrm{Arctan}\ a} \sin^2 t\ dt.$$
On pourra appliquer, après justification, le changement de variables $t = \mathrm{Arctan}\ x$.
3. Soit $b>0$ un réel. Calculer
$$\int_0^b \sin^2 t\ dt.$$
4. En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$$