Université de Rennes

Analyse et Probabilités 3

Feuille d'exercices n°3

Continuité uniforme

Exercice n°1

Utiliser la définition pour montrer que les fonctions suivantes sont (ou ne sont pas) uniformément continues.

1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \sin x$ **2)** $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2$ **3)** $f_3 : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f_3(x) = x^2$

Dans quels cas le théorème de Heine est (ou n'est pas) applicable ?

Exercice n°2

Montrer que pour tous réels x et y on a $||y| - |x|| \leq |y - x|$. En déduire que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°3

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continues et bornées. Montrer que leur produit fg est une fonction uniformément continue. Donner un contre-exemple quand on ne suppose plus que f et g sont bornées.

Exercice n°4

Soit $x_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{\dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (y_n - x_n) = 0$.

2) Utiliser 1) pour étudier la continuité uniforme de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x^2)$.

Intégrale de Riemann - Sommes de Riemann

Exercice n°5

1) Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ des sommes suivantes :

(a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$; **(b)** $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$; **(c)** $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{n+k}$

2) Calculer $\lim_{n\to+\infty} A_n$ avec $A_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}}$.

Exercice n°6 (*Test d'octobre 2023*)

Vrai ou faux ? Les sommes suivantes sont des sommes de Riemann d'une certaine fonction intégrable sur un certain segment :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$; *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

Intégrale et relation d'ordre

Exercice n°7

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice n°8

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$ à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $f(x)g(x) \geq 1$.

1. Montrer que f et g sont de (même) signe constant sur $[a,b]$.
2. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{|f|}$ et $\sqrt{|g|}$ sur $[a,b]$.
3. En déduire que $\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \geq (b-a)^2$

Exercice n°9 (*Formule de Taylor*)

Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout réel x, $|f(x)| \leq 1$ et $|f''(x)| \leq 1$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, on a
$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq h^2/2.$$
   (b) En déduire que pour tout réel x, on a $|f'(x)| \leq 2$.
2. (a) Montrer qu'on a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,
$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq h^2/2.$$
   (b) En déduire que pour tout réel x, on a même $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$.

Exercice n°10

1) Soit x un réel. Montrer que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et que l'on a $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. *On pourra appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle.*

2) Rappeler pourquoi la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Calcul d'intégrales

Exercice n°11

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$ (intégration par parties)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\, dx$ (à l'aide d'un changement de variables simple)
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$ (changement de variable $x = \tan t$)
4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\, dx$ (décomposition en éléments simples)

$\boxed{\textbf{Exercice n°12}}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale
$$\int_0^1 f(t)dt,$$
puis calculer la.
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$. Étudier la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°13}}$

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1+\cos x+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x$ **3)** $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos 2x\,\mathrm{d}x$ **5)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\,\mathrm{d}x$ **6)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x\sin x\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\textbf{Exercice n°14}}$ *(Calcul de primitives par IPP)*

Trouver les primitives suivantes

1) $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$ **2)** $\int x\mathrm{Arctan}\ x\,\mathrm{d}x$ **3)** $\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\textbf{Exercice n°15}}$ *(Calcul de primitives par changement de variables)*

Trouver les primitives suivantes

1) $\int \sin x\cos^{2024} x\,\mathrm{d}x$ **2)** $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ **3)** $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\textbf{Exercice n°16}}$ *(Calcul de primitives)*

Trouver les primitives suivantes

1) $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ **2)** $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x$ **3)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$

4) $\int \frac{\sin^3(x)}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ **5)** $\int \sin(2x)\cos(7x)\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\textbf{Exercice n°17}}$

Calculer $\int(\cos 2x+3\sin 2x)\,e^x\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°18}}$ (*Examen de janvier 2024*)

1. Déterminer les réels a, b, c tels que pout tout $t \in \mathbb{R}^*$, on ait
$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{b+ct}{1+t^2}.$$
2. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x(2-\cos^2 x)}dx.$$
(On pourra, après justification, utiliser le changement de variables $t = \sin x$.)

Exercice n°19 (Intégration d'une fonction à valeurs complexes)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{5 + 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

1) Montrer que J_n est réel puis trouver une relation de récurrence entre J_n, J_{n-1} et J_{n-2}.

2) Vérifier que $J_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice n°20 (*Examen de juin 2019*)

1) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(X^2+1)(X^2+3)}$.

2) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)}{3\cos^2 x + \sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice n°21 ($\star$) (Intégration d'une fonction à valeurs complexes)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{5 + 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

1) Montrer que J_n est réel puis trouver une relation de récurrence entre J_n, J_{n-1} et J_{n-2}.

2) Vérifier que $J_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{2\pi}{3}$.

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Exercice n°22
Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1+\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice n°23 (*Examen de décembre 2018*)
Soit f la fonction donnée sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \int_{2x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+\sqrt{t})} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

1) Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

2) Montrer que f n'est pas dérivable en 0. *On pourra utiliser la formule de la moyenne.*

3) Montrer que pour $x > 2$, $f(x) \geq \dfrac{x^2 - 2x}{\ln(1+x)}$. Que peut-on dire de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Exercice n°24
Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour $x > 0$, $f'(x)$. En déduire les variations de f.

3) En minorant très simplement $\dfrac{e^t}{t}$ sur $[x, 2x]$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4) Pour $x > 0$, calculer $I = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. En encadrant e^t sur $[x, 2x]$, montrer que f admet une limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.