Université de Rennes

Analyse et Probabilités 3

Feuille d'exercices n°3

Continuité uniforme

Exercice n°1

Utiliser la définition pour montrer que les fonctions suivantes sont (ou ne sont pas) uniformément continues.

1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \sin x$ **2)** $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2$ **3)** $f_3 : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ f_3(x) = x^2$

Dans quels cas le théorème de Heine est (ou n'est pas) applicable ?

Exercice n°2

1) Montrer que pour tous réels x et y on a $||y|-|x|| \leq |y-x|$. En déduire que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tous réels positifs x et y on a $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$. En déduire que $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice n°3

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continues et bornées. Montrer que leur produit fg est une fonction uniformément continue. Donner un contre-exemple quand on ne suppose plus que f et g sont bornées.

Exercice n°4

Soit $x_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{\dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (y_n - x_n) = 0$.

2) Utiliser 1) pour étudier la continuité uniforme de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x^2)$.

Exercice n°5 $(\star)$

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.
Montrer que f est bornée puis que f est uniformément continue.

Intégrale de Riemann - Sommes de Riemann

Exercice n°6 *(Sommes de Riemann)*

1) Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ des sommes suivantes :

$$\textbf{(a)}\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\ ; \qquad \textbf{(b)}\ T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}\ ; \qquad \textbf{(c)}\ U_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{n+k}$$

2) Calculer $\lim_{n\to+\infty} A_n$ avec $A_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°7}}$ (*Test de novembre 2018*)

Entourer la ou les affirmation(s) exacte(s).

Soit f l'application de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui à x associe x^2. Soit n un entier. Alors :

A. $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{k^2}{8n^3}$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0,1]$.

B. $S_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0,1]$.

C. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°8}}$ (*Contrôle continu de novembre 2018*)

1) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$.

a) Montrer que R_n est une somme de Riemann d'une fonction que l'on précisera sur un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

2) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{kn}\right)$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Intégrale et relation d'ordre

$\boxed{\textbf{Exercice n°9}}$ *(Exercice du cours)*

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ positive ($f \geq 0$) telle qu'il existe $c \in [a,b]$ avec $f(c) > 0$.
Montrer que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°10}}$

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$ à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $f(x)g(x) \geq 1$.

1. Montrer que f et g sont de (même) signe constant sur $[a,b]$.
2. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Scwarz aux fonctions $\sqrt{|f|}$ et $\sqrt{|g|}$ sur $[a,b]$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \geq (b-a)^2$

$\boxed{\textbf{Exercice n°11}}$ ($\star$)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

On pose $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$. Montrer que $|\alpha_n| \leq \dfrac{k}{2n}$.

Formule de Taylor

$\boxed{\textbf{Exercice n°12}}$

Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout réel x, $|f(x)| \leq 1$ et $|f''(x)| \leq 1$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(h)| \leq h^2/2.$$

(b) En déduire que pour tout réel x, on a $|f'(x)| \leq 2$.

2. (a) Montrer qu'on a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$|f(x-h) - f(x) + hf'(h)| \leq h^2/2.$$

(b) En déduire que pour tout réel x, on a même $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$.

Exercice n°13

1) Soit x un réel. Montrer que la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et que l'on a $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. *On pourra appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle.*

2) Rappeler pourquoi la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Calcul d'intégrales

Exercice n°14

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1+\cos x+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x$ **3)** $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos 2x\,\mathrm{d}x$ **5)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\,\mathrm{d}x$ **6)** $\displaystyle\int_4^5 \frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}\,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ **8)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ **9)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x \sin x\,\mathrm{d}x$

Exercice n°15 *(Calcul de primitives)*

Trouver les primitives suivantes

1) $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ **2)** $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x$ **3)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$

4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3\cos^2(x)}$ **5)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos(a)\cos(x)}$ **6)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}$

7) $\int \frac{\sin^3(x)}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ **8)** $\int \sin(2x)\cos(7x)\,\mathrm{d}x$

Exercice n°16

1) Calculer $\int (\cos 2x + 3\sin 2x)\,e^x\,\mathrm{d}x$.

2) Vérifier que les primitives $\int (\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x)\,e^x\,\mathrm{d}x$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, sont de la forme

$$x \longmapsto (A\cos 2x + B\sin 2x)\,e^x + C$$

avec A, B, C des réels. On précisera les expressions de A et B en fonction de α et β.

Exercice n°17 (Intégration d'une fonction à valeurs complexes)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

1) Montrer que J_n est réel puis trouver une relation de récurrence entre J_n, J_{n-1} et J_{n-2}.

2) Vérifier que $J_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{2\pi}{3}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°18}}$ (*Examen de juin 2019*)

1) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(X^2+1)(X^2+3)}$.

2) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)}{3\cos^2 x+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°19}}$

1) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(a+b-x) = f(x)$. Exprimer $\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) En déduire la valeur de $\int_0^\pi \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

Intégrale fonction de sa borne supérieure

$\boxed{\textbf{Exercice n°20}}$

Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1+\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

$\boxed{\textbf{Exercice n°21}}$ $(\star)$

Soit a un réel fixé. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + f(1-x) = a$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°22}}$ (*Examen de décembre 2018*)

Soit f la fonction donnée sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \int_{2x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+\sqrt{t})} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

1) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

2) Montrer que f n'est pas dérivable en 0. *On pourra utiliser la formule de la moyenne.*

3) Montrer que pour $x > 2$, $f(x) \geq \dfrac{x^2-2x}{\ln(1+x)}$. Que peut-on dire de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

$\boxed{\textbf{Exercice n°23}}$

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour $x > 0$, $f'(x)$. En déduire les variations de f.

3) En minorant très simplement $\dfrac{e^t}{t}$ sur $[x,2x]$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4) Pour $x > 0$, calculer $I = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. En encadrant e^t sur $[x,2x]$, montrer que f admet une limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.