Université de Rennes

Analyse et Probabilités 3

Feuille d'exercices n°2

Séries numériques

Exercice n°1

Vérifier les relations suivantes :

a) $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **b)** $\dfrac{4n^3-\sqrt{n^5+3n^4}}{\left(\sqrt{2}n+\sqrt{n}\right)^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ **c)** $\dfrac{\ln(2^{n^2+3n})}{\ln(2^{n\sqrt{n}})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$

d) $\dfrac{\ln(n^2+n)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ **e)** $n^4 2^{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\dfrac{6}{5}\right)^{n^3}\right)$

Exercice n°2 *(Test de novembre 2022)*

Vrai ou faux :

a) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *b)* $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O(\dfrac{1}{n})$ *c)* $\dfrac{\cos n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o(\dfrac{1}{n})$

Exercice n°3

Montrer que la série de terme général u_n est divergente pour :

a) $u_n = (-1)^n$ b) $u_n = \sqrt{n}\,\ln\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ c) $u_n = e^{\sin n}$ d) $u_n = \dfrac{e^n n!}{n^n}$

Exercice n°4

Étudier la nature des séries suivantes et en cas de convergence calculer la valeur de leur somme (on admet que $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$).

a) $\sum \dfrac{1}{(1+n)(n+2)}$ **b)** $\sum \dfrac{1}{n^2(1+n)}$ **c)** $\sum \left((n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$

d) $\sum \dfrac{n^2+2n-1}{n!}$ **e)** $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$

Exercice n°5 *(Contrôle 2022)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}.$$

1. Étudier la limite de $(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. Montrer que
$$u_n \geq \frac{1}{2n}$$
pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice n°6 *(Contrôle 2022)*

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est :

$$a) u_n = \frac{2^n + n^2}{2^n + n^4} \qquad b) u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2 + 3} \qquad c) u_n = \frac{\cos^2 n}{3^n}$$

Exercice n°7

1) Montrer que la convergence d'une suite réelle (u_n) est équivalente à la convergence de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.

2) En déduire que la suite définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ est convergente.

Exercice n°8

Étudier la nature des séries suivantes.

a) $\sum \frac{1}{n^{n+2}}$ **b)** $\sum \frac{3n+2}{5n^2+2n+7}$ **c)** $\sum \frac{n^2+5n-2}{n^5+4n^2+3}$ **d)** $\sum \frac{\sin n}{n^2+3n+1}$

e) $\sum \frac{1}{n(n+\ln n)}$ **f)** $\sum \frac{n!}{(2n)!}$ **g)** $\sum \frac{n!+1}{(n+1)!}$ **h)** $\sum \frac{1}{2^n+3^n}$

i) $\sum \frac{2^n+n}{n2^n}$ **j)** $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ **k)** $\sum \left(\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ **l)** $\sum e^{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$

Exercice n°9 *(Contrôle 2020)*

1) Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n \sin n}{n\sqrt{n}+1}$.

2) Étudier la convergence de la série $\sum \frac{2^n - 3^n}{n+1}$.

Exercice n°10

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de réels. Démontrer les assertions suivantes quand elles sont justes et trouver un contre-exemple quand elles sont fausses.

a) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum nu_n$ converge.

b) Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

c) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge.

d) Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n^2$ converge.

e) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.

Exercice n°11

On considère les suites définies par $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1) Vérifier que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries alternées et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

2) Étudier la nature de la série alternée $\sum u_n$.

3) Étudier la nature de la série $\sum v_n$ (*on pourra utiliser un développement limité*).

Exercice n°12

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

Exercice n°13 $(\star)$

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $\forall n \geq N, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

1) Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2) En déduire la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} . \dfrac{1}{2n+2}$ (on prendra $v_n = n^{-\alpha}$avec $1 < \alpha < 3/2$ et on utilisera le DL à l'ordre 1 de$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$).

Exercice n°14

Étudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général est :

a) $\dfrac{(-1)^n}{n^2 + \sin n^2}$ b) $\dfrac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ c) $\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$ d) $e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

e) $\sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ f) $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ g) $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right)$ h) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

Exercice n°15 *(Test de novembre 2022)*

Vrai ou Faux : la série $\sum u_n$ converge dans les cas suivants :

$a)u_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{n^2}$ $b)u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ $c)u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ $d)u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Exercice n°16 *(Contrôle de novembre 2022)*

Étudier la nature de la série $\sum_n u_n$ dont le terme général est

$a)u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{3 + e^{-n}}$ $b)u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+n+1}$ $c)u_n = \dfrac{\sin n}{n^2 - \sqrt{n}}$

Exercice n°17 *(Contrôle de novembre 2022)*

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x$.
2. Étudier la nature de la série $\sum_n (e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1)$

Exercice n°18 (*Examen de juin 2019*)

Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2 - n\sqrt{n}}$.

Exercice n°19 (*Contrôle continu d'octobre 2018*)

Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$$

On cherche à déterminer la nature (absolument convergente, semi-convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$ en fonction des valeurs de a.

1) Montrer que la série $\sum w_n$ est convergente.

2) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

3) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \sin x$.
En déduire que si $a \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[$ alors la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

Exercice n°20 (*Contrôle continu d'octobre 2019*)
Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad w_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

1) Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n$.

2) Montrer qu'aucune des deux séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ n'est absolument convergente.

3) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

4) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \ln(1+x)$.
En déduire la nature de la série $\sum w_n$ (on justifiera soigneusement le raisonnement).

Exercice n°21 ($\star$)*(Formule de Stirling)*

1) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt$.

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.

b) Soit $n \geq 2$. Montrer que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. En déduire les expressions de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

c) Prouver que $I_{n+1} \underset{n \to \infty}{\sim} I_n$.

d) En déduire la formule de Wallis : $\pi = \displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n.((2n)!)^2}$.

2) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n - \ln(n!)$

a) Montrer que $S_{n+1} - S_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel λ.

b) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $n^n e^{-n} \sqrt{n} \sim e^{\lambda} n!$

c) À l'aide de la première question, montrer que $\lambda = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$. En déduire la ***formule de Stirling*** :

$$n! \underset{n \to \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$