Université de Rennes

Analyse et Probabilités 3

Feuille d'exercices n°1

Comparaison des fonctions - Développements limités

Exercice n°1

Montrer que : **1)** $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$ **2)** $\tan^3 x \sin\frac{1}{x} = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ **3)** $(1+x)^n = 1 + nx + \underset{x\to 0}{o}(x)$, $(n\in\mathbb{N}^*)$.

Exercice n°2

Soit g une fonction définie dans un voisinage de $x_0\in\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Montrer que pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $0<m<n$ on a $g^n(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g^m(x))$.

Exercice n°3

Démontrer les propriétés suivantes (tout a lieu quand x tend vers a).

1. Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) = O(g(x))$.
2. Si $f(x)\sim g(x)$, alors $f(x) = O(g(x))$.
3. Si $f(x) = O(g(x))$ et $g(x)\sim h(x)$, alors $f(x) = O(h(x))$
4. Si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.
5. Si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors $(f_1+f_2)(x) = o(g(x))$.
6. Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, alors $(f_1 f_2)(x) = o(g_1 g_2)(x)$.

Exercice n°4

Déterminer un équivalent le plus simple possible des fonctions suivantes :

1) $x\mapsto x-2+3\ln x$ en 0 puis en $+\infty$ **2)** $x\mapsto \cos(\sin x)$ en 0 **3)** $x\mapsto \cosh(\sqrt{x})$ en $+\infty$

4) $x\mapsto \dfrac{\sin x\,\ln(1+x^2)}{x\tan x}$ en 0 **5)** $x\mapsto \ln(\sin x)$ en 0 **6)** $x\mapsto \ln(\cos x)$ en 0

Exercice n°5

Calculer les développements limités suivants :

1) $f(x)+g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

2) $f(x)+g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0 , sachant que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

3) $\sin x + \operatorname{ch} x$ à l'ordre 6, au voisinage de 0. **4)** $\ln(1+x) + e^x$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

Exercice n°6

Calculer les développements limités suivants :

1) $f(x)g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

2) $f(x)g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0 , sachant que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = -3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

3) $e^x \sin x$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

Exercice n°7

Calculer les développements limités suivants :

1) $f \circ g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2x + x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

2) $f \circ g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0 , sachant que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 + 2x + x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

3) $\sin(\ln(1+x))$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.
4) $\sin(\operatorname{sh} x)$ à l'ordre 5, au voisinage de 0.
5) $\operatorname{sh}(1-\cos x)$ à l'ordre 5, au voisinage de 0.
6) $\ln(1+\operatorname{sh} x)$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

Exercice n°8

Calculer les développements limités suivants :

1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0 , sachant que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = -3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

3) $\dfrac{x}{1-x^2}$ à l'ordre 6, au voisinage de 0.
4) $\dfrac{1}{1+\exp x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

Exercice n°9

Calculer les développements limités en zéro suivants :

1) $\arctan x$ à l'ordre 5
2) $\arccos x$ à l'ordre 5
3) $\ln(3+x^2)$ à l'ordre 5

Exercice n°10

1) Trouver un développement limité à l'ordre 4 en 0 de la primitive F nulle en 0, de la fonction $x \mapsto e^{\sin x}$.

2) On suppose qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) = x + f(x)$ possède un développement limité à l'origine, jusqu'à l'ordre 4. Déterminer ce développement limité.

3) Soient I, J deux intervalles ouverts contenant l'origine et soit $f : I \to J$ une fonction indéfiniment dérivable bijective telle que : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On suppose que le développement limité à l'ordre 5 de f en 0 s'écrit : $f(x) = x + a_3x^3 + a_5x^5 + x^5\varepsilon(x)$. Exprimer en fonction de a_3 et a_5 le développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0 ($f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id$).

4) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + \sin x)$. Démontrer que f admet au voisinage de zéro une fonction réciproque g de classe $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer le développement limité de g en 0 à l'ordre 4.

Exercice n°11

Jusqu'à quel ordre les fonctions suivantes admettent-elles des développements limités au voisinage de 0 ?

1) $f_1 : x \longmapsto x^\pi$ avec $f_1(0) = 0$. **2)** $f_2 : x \longmapsto x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ avec $f_2(0) = 0$. f_2 est-elle deux fois dérivable en 0 ?

3) $f_3 : x \longmapsto e^{\frac{-1}{x^2}}$ avec $f_3(0) = 0$. **4)** $f_4 : x \longmapsto x^5 \ln x$ avec $f_4(0) = 0$.

Exercice n°12

Trouver les développements suivants au voisinage des points et aux ordres indiqués :

1) e^x au voisinage de 1, à l'ordre 3. **2)** $(1 + x)^\alpha$ au voisinage de 1, à l'ordre 2.

3) $\sin x$ au voisinage de $\pi/4$, à l'ordre 4. **4)** $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \ln x$ au voisinage de $+\infty$, à l'ordre 4.

5) $\ln x$ au voisinage de $a > 0$, à l'ordre 2. **6)** $(x^2 - 1)/(x^2 + 2x)$ au voisinage de l'infini, à l'ordre 2.

Exercice n°13

Trouver un équivalent (simple) au voisinage de zéro de :

1) $\cos x - \cos 2x$ **2)** $\sin x - \tan x$ **3)** $\ln \dfrac{1 + x}{1 - x} - \sin 2x - 2x^3$

4) $\ln\left(1 - \dfrac{\exp(x)}{2}\right) - \dfrac{4x + x^2}{8}$ **5)** $\cos x - \dfrac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ **6)** $x^x - (\sin x)^{\sin x}$

Exercice n°14

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x \cos x}{\tan^2 x}$ **2)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ **3)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arctan} x + \tan x - 2x}{\arcsin x + \sin x - 2x}$

4) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2}{\pi - 2x} - \tan x$ **5)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}}$ **6)** $\lim_{x\to +\infty} x^2 \ln \cos \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2} \sin^2 \dfrac{1}{x}$

Exercice n°15 *(Contrôle d'octobre 2022)*

1. Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions $x \mapsto e^{x^2}$ et $x \mapsto (1 + x^2)^3$.
2. Déterminer le réel a pour lequel la limite pour x tendant vers 0 de

$$x \mapsto \frac{(1 + x^2)^3 - 3e^{x^2} + a}{(1 - \cos x)^2}$$

est finie. Calculer alors cette limite.

Exercice n°16 *(Contrôle d'octobre 2022)* On considère la fonction f définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

1. Donner le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0.
2. En déduire le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée est dérivable en 0. Donner la valeur de la dérivée en 0.
4. Dessiner l'allure de la courbe représentative de f à l'origine et de sa tangente.

Exercice n°17 *(Contrôle d'octobre 2020)*

1. Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ puis de $x \mapsto \ln(2+x)$.
2. Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto e^x$ et de $x \mapsto \cos(x)$.
3. Déterminer le réel a pour lequel la limite pour x tendant vers 0 de
$$\frac{2\ln(2+x) - e^x - 2\cos(x) + a - \frac{1}{4}x^2}{\sin^3 x}$$
est finie et calculer alors cette limite.

Exercice n°18 *(Contrôle d'octobre 2023)*

1) Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions $x \mapsto \sqrt{\cos x}$ et $x \mapsto \sin^2 x$.

2) Déterminer le réel a pour lequel la limite en 0 de

$$x \mapsto \frac{4\sqrt{\cos x} + \sin^2 x + a}{x^2(e^x - 1)^2}$$

est finie. Calculer alors cette limite.

Exercice n°19 *(Contrôle d'octobre 2023)*

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.

1. Si $l \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} l$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$.
2. Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$, alors $(f+g)(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.
3. La fonction définie par $x \mapsto \dfrac{x\ln(1+x^2)}{\tan^3 x}$ admet 1 pour limite en 0.
4. Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre 3 en 0. Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$, alors les développements limités de f et g à l'ordre 3 en 0 coincident.

Exercice n°20 *(Contrôle d'octobre 2019)*

On considère la fonction $f :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{x}{\tan x}$.

1) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \tan x$.

2) Justifier que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2. Donner ce développement.

3) En déduire que f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ et que ce prolongement est dérivable en 0. Donner la valeur de $f'(0)$.

4) *(Question Bonus)* Justifier que f' a un développement limité à l'ordre 1 en 0. En déduire que f est deux fois dérivable en 0 et donner la valeur de $f''(0)$.

Exercice n°21

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \operatorname{argsh} x - \alpha x - \beta x^2$. Préciser, selon les valeurs de α et β, l'allure de $\mathcal{C}$ au voisinage de 0.