

Chapitre 1

Comparaison des fonctions - Développements limités

1.1 Comparaison locale des fonctions

On veut comparer des fonctions « quand x tend vers a ». Ici a pourra être un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Nous convenons ici que toutes les fonctions considérées sont définies au moins

- si $a \in \mathbb{R}$: sur un intervalle ouvert contenant a , sauf peut-être en a ;
- si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) : sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (resp. $] - \infty, A[$).

On dit qu'une telle fonction f vérifie une propriété P **au voisinage de** $a \in \mathbb{R}$ lorsqu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que, pour tous les x de $I \cap D_f$, $f(x)$ vérifie P .

Dans le cas où $a = \pm\infty$, la définition est similaire avec un intervalle I de la forme $]M, +\infty[$ (resp. $] - \infty, M[$).

1.1.1 Fonctions équivalentes

Définition 1.1. Soit f et g deux fonctions. On dit que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ quand x tend vers a quand il existe une fonction h telle que $f = gh$ et que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$. Si g ne s'annule pas

au voisinage de a , sauf peut-être en a , ceci revient à dire que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

On n'oubliera pas de toujours préciser en quel point les fonctions sont équivalentes, ou du moins de le garder toujours présent à l'esprit.

Voici quelques exemples d'équivalents classiques :

$$\begin{array}{lll} e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & ((1+x)^\alpha - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \\ \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & (\cos x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2/2 \\ \sinh x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \tanh x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & (\cosh x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2/2 \end{array}$$

Exercice. Vérifier toutes ces équivalences à l'aide de la définition du nombre dérivé ou de la règle de l'Hospital. Comme illustration de la mise en garde sur la nécessité de préciser en quel point les équivalences ont lieu, vérifier également qu'aucune des équivalences ci-dessus n'a lieu quand x tend vers $+\infty$, sauf la troisième pour une seule valeur de α : préciser laquelle.

Voici quelques propriétés de l'équivalence.

Proposition 1.2. 1. L'équivalence de fonctions est une relation d'équivalence :

- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$ (réflexivité)
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ entraîne $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$ (symétrie)
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ entraînent $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ (transitivité).

2. Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$, alors $(f_1 f_2)(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g_1 g_2)(x)$.
3. Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$, et si $g_2(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut-être en a), alors $(f_1/f_2)(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g_1/g_2)(x)$.

Démonstration : Contentons nous ici de vérifier la troisième propriété. On suppose que $f_i(x) = h_i(x)g_i(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} h_i(x) = 1$, pour $i = 1, 2$. Si $g_2(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a , alors $f_2(x) = h_2(x)g_2(x)$ non plus. On a $(f_1/f_2)(x) = (h_1/h_2)(x) \times (g_1/g_2)(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow a} (h_1/h_2)(x) = 1$. \square

Exercice. Vérifier les autres propriétés de la proposition.

Exercice. Montrer que si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors, pour tout n de \mathbb{N}^* , $f(x)^n \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^n$.

Il faut **se méfier des sommes** : si on a $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$, on n'a pas forcément $(f_1 + f_2)(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g_1 + g_2)(x)$. Par exemple on a $-x^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^3 + x$ et $x^3 + x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$, mais on n'a pas $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x!!$

On ne peut pas non plus composer des équivalents. Par exemple, on a $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x + 1$, mais e^x n'est pas équivalent à e^{x+1} quand x tend vers $+\infty$!

L'usage des équivalents (quand x tend vers a) permet de calculer certaines limites (en a). Par exemple, $x^2((1+x)^3 - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \times 3x = 3x^3$ et $\sin x \cdot (1 - \cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$, et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2((1+x)^3 - 1)}{\sin x(1 - \cos x)} = 6.$$

Remarques.

- Deux fonctions équivalentes en a ont nécessairement le même signe sur un voisinage de a .
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \neq 0$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$.

1.1.2 Fonction négligeable devant une autre, dominée par une autre

Définition 1.3. On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ quand x tend vers a s'il existe une fonction ϵ , telle que $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$ et que $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ au voisinage de a . Si g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a , ceci revient à dire que $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = 0$. On note $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ (on lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ »).

La notation $f(x) = o(g(x))$ est un **abus de notation** (si on a aussi $h(x) = o(g(x))$, ce n'est pas pour cela que $f(x) = h(x)$). Mais elle est employée couramment. Comme cette notation risque d'induire en erreur, on a intérêt en cas de doute à revenir à l'écriture $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$.

Donnons quelques exemples. • $x^m = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$ si et seulement si $m > n$.

- $x^m = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^n)$ si et seulement si $m < n$.
- $\ln(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$.

Définition 1.4. On dit que $f(x)$ est dominé par $g(x)$ quand x tend vers a quand il existe une constante réelle $K > 0$ telle que $|f(x)| \leq K|g(x)|$ au voisinage de a . On écrit $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$ (on lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ »).

La notation $f(x) = O(g(x))$ est encore un abus.

Quelques exemples : $x \sin(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(x)$; $2x^3 + 15x^2 = \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^2)$ et $2x^3 + 15x^2 = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(x^3)$.

On a aussi : $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(1) \iff f$ est bornée au voisinage de a .

Exercice. Démontrer les propriétés suivantes (tout a lieu quand $x \rightarrow a$).

1. Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) = O(g(x))$.
2. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) = O(g(x))$.
3. Si $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) = O(h(x))$.
4. Si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.
5. Si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors $(f_1 + f_2)(x) = o(g(x))$.
6. Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, alors $(f_1 f_2)(x) = o(g_1 g_2)(x)$.

Une erreur à ne pas faire : si $f(x) = o(g_1(x))$ et $f(x) = o(g_2(x))$ quand $x \rightarrow a$, on ne peut pas en déduire que $f(x) = o((g_1 + g_2)(x))$ quand $x \rightarrow a$. Par exemple, prendre $f(x) = x^3$, $g_1(x) = x^2 + x^3$, $g_2(x) = -x^2$ quand $x \rightarrow 0$.

Les notations o et O sont appelées notations de Landau (Edmund Landau (1877–1938), mathématicien allemand)

1.2 Développement limité

1.2.1 Formule de Taylor avec reste de Young

Théorème 1.5. Soit a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. Soit f une fonction réelle définie et $n - 1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a . On suppose que f a une dérivée n -ième $f^{(n)}(a)$ en a . Alors, pour $a + h \in I$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n \epsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Ou encore,

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

Le « reste » $h^n \epsilon(h)$ s'appelle reste de Young, et la formule du théorème est la *formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en a* . Avec la notation du petit o , le reste peut aussi s'écrire $o_{h \rightarrow 0}(h^n)$ ou $o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$. A l'ordre 1, la formule s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

C'est simplement écrire que f a pour dérivée $f'(a)$ en a . La formule de Taylor avec reste de Young en a donne des renseignements sur le comportement de la fonction quand la variable tend vers a , comme la formule pour la dérivée en a qu'elle généralise.

Démonstration : Posons, pour $x \in I$,

$$g(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

(g n'est autre que le polynôme de Taylor de f en a à l'ordre $(n-1)$.)

On vérifie que $g(a) = f(a)$ et que $g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

Fixons $x \in I \setminus \{a\}$ (que devient la formule pour $x = a$?) et posons, pour $t \in I$,

$$\Phi(t) = f(t) - g(t) - A(t-a)^n \quad \text{où } A \text{ est une constante (vis à vis de } t).$$

La fonction Φ est $n-1$ fois dérivable sur I . On constate que $\Phi(a) = \Phi'(a) = \dots = \Phi^{(n-1)}(a) = 0$.

On choisit alors A en sorte que $\Phi(x) = 0$ ce qui revient alors à poser $A = \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n}$. D'après

le théorème de Rolle (Que dit ce théorème ? Quelles en sont les hypothèses ? Sont-elles vérifiées ici ?), il existe c_1 entre a et x tel que $\Phi'(c_1) = 0$. De nouveau d'après le théorème de Rolle, il existe c_2 entre a et c_1 tel que $\Phi''(c_2) = 0$. En continuant ainsi, on trouve c_{n-1} , entre a et x , tel que $\Phi^{(n-1)}(c_{n-1}) = 0$. Comme

$$\Phi^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a) - An!(t-a),$$

on obtient

$$\frac{f^{(n-1)}(c_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{(c_{n-1} - a)} = An!.$$

Quand x tend vers a , c_{n-1} qui est coincé entre a et x tend vers a . Comme $f^{(n-1)}$ est dérivable en a , on a alors $An! \xrightarrow{x \rightarrow a} f^{(n)}(a)$ ce qui permet d'écrire

$$A = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\epsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \epsilon_1(x) = 0.$$

En reportant dans l'expression choisie de A , on obtient bien

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \epsilon(x) = \frac{\epsilon_1(x)}{n!} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

□

Les hypothèses que l'on a données visent à avoir un énoncé le plus général possible. Dans la pratique, on a souvent à écrire une formule de Taylor-Young en a pour une fonction f qui est \mathcal{C}^∞ sur un intervalle ouvert contenant a . Dans ce cas, les hypothèses du théorème 1.5 sont bien sûr vérifiées.

Exemples. En $a = 0$, la formule de Taylor avec reste de Young s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

Pour $f : x \mapsto e^x$ (qui est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}), on a $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout k , et la formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Pour $f : x \mapsto \sin x$, les valeurs en 0 de la fonction et de ses dérivées successives sont 0, 1, 0, -1 et puis on recommence. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $2n$ en 0 s'écrit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

Pour $f : x \mapsto \cos x$, les valeurs en 0 de la fonction et de ses dérivées successives sont 1, 0, -1, 0 et puis on recommence. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $2n + 1$ en 0 s'écrit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

Soit α un nombre réel. Alors $f(x) = (1+x)^\alpha$ définit une fonction \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$, et $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

1.2.2 Développements limités

Définition 1.6. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant a . On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en a** s'il existe des réels a_0, \dots, a_n tels que

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + h^n\epsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$ s'appelle la **partie régulière** de ce développement limité.

Remarques.

- Un développement limité de f à l'ordre n nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui « se comporte comme f à l'ordre n » au voisinage de a , dans le sens que la différence entre $f(a+h)$ et ce polynôme en h est négligeable devant h^n quand h tend vers 0.
- Si la fonction f est $n-1$ fois dérivable sur un intervalle contenant a et a une dérivée n -ième en a , la formule de Taylor-Young nous donne un développement limité à l'ordre n , avec $a_0 = f(a)$ et $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ pour $1 \leq k \leq n$.
- Réciproquement, on peut se demander si un développement limité est toujours donné par une formule de Taylor-Young, c.-à-d. si une fonction qui a un développement limité à l'ordre n en a a une dérivée n -ème en a . C'est vrai à l'ordre 1, et dans un développement limité

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n)$$

on a toujours $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$. Mais ceci ne va plus à l'ordre 2. Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x)$. où l'on pose $f(0) = 0$.

f a un développement limité à l'ordre 2 en 0 : $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$. En effet, on a $x^3 \sin(1/x) = x^2 \cdot x \sin(1/x)$ avec $|x \sin(1/x)| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. On vérifie d'autre part que f est dérivable sur \mathbb{R} avec

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x) = 1 + x(2 - \cos(1/x)) + 3x^2 \sin(1/x), \quad \text{et} \quad f'(0) = 1$$

et f n'a donc pas de dérivée seconde en 0 car

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x) - 1}{x} = 2 - \cos(1/x) + 3x \sin(1/x)$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Exemple. Pour tout réel $x \neq 1$ on a $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$ (souvenez vous de la somme des termes d'une suite géométrique...) et on en déduit le développement limité en 0

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).}$$

Introduisons une notation qui sera utile pour la suite. Si P est un polynôme, on désignera par $T_k(P)$ (le **tronqué** de P au degré k) le polynôme obtenu à partir de P en ne conservant que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à k . Par exemple $T_4(x - x^3/3 + 2x^5) = x - x^3/3$.

Proposition 1.7. 1) Un développement limité, lorsqu'il existe, est unique.

2) Si f a un développement limité à l'ordre n en a , de partie régulière P , et si $k \leq n$, alors f a aussi un développement limité à l'ordre k , dont la partie régulière est le tronqué $T_k(P)$.

Démonstration : 1) Si on a

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + h^n\epsilon(h) = b_0 + b_1h + \dots + b_nh^n + h^n\varphi(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$, alors, pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$

$$\frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \dots + (a_n - b_n)h^n}{h^k} = h^{n-k}(\varphi(h) - \epsilon(h))$$

ce qui, en donnant successivement à k les valeurs $0, 1, \dots, n$ et en faisant tendre h vers 0, entraîne $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ et donc aussi $\epsilon(h) = \varphi(h)$.

2) Avec les mêmes notations, $f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_kh^k + [a_{k+1}h^{k+1} + \dots + a_nh^n + o(h^n)]$, et le terme entre crochet est $h^k[a_{k+1}h + \dots + a_nh^{n-k} + o(h^{n-k})] = o(h^k)$. \square

Voici maintenant une remarque dont il est utile de se souvenir pendant les calculs

Proposition 1.8. *La partie régulière du développement limité en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) est un polynôme pair (resp. impair), c.-à-d. qu'il ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de la variable.*

Démonstration : Si f est paire et si, en 0

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

alors en changeant x en $-x$ on obtient

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1x + \dots - a_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

d'où par unicité du développement limité, $a_1 = -a_1, \dots, a_{2n+1} = -a_{2n+1}$ et donc

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

\square

Par exemple, la partie régulière du développement limité de $\sin x$ en 0 ne contient que des puissances impaires.

1.2.3 Opérations sur les développements limités

Dans tout ce paragraphe, nous ne considérerons que des développements limités en 0.

Proposition 1.9 (Somme et produit). *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités au même ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n),$$

alors $f + g$ et fg ont aussi un développement limité à l'ordre n en 0 et on a :

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n) \\ (fg)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}\right)x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité de la somme est la somme des parties régulières de chacun des développements limités, et celle du produit est le tronqué au degré n du produit des parties régulières (tous les développements limités étant au même ordre n).

Démonstration : Le premier point est clair puisque $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$ (et oui, il s'agit bien d'un abus d'écriture!).

Pour le produit, on écrit $f(x) = A(x) + o(x^n)$ et $g(x) = B(x) + o(x^n)$ et on a alors $f(x)g(x) = A(x)B(x) + [A(x) + B(x) + o(x^n)]o(x^n)$ et on conclut en remarquant que d'une

part $A(x)B(x) = T_n[A(x)B(x)] + o(x^n)$ et d'autre part $[A(x) + B(x) + o(x^n)]o(x^n) = o(x^n)$ (toujours pour x tendant vers 0). \square

Exemples.

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 = 1 - x^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{24}\right)x^4 + o(x^5) \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\end{aligned}$$

Quand on fait le produit des parties régulières (ou qu'on élève au carré, comme ici), il n'est bien entendu pas besoin de calculer les termes dont le degré dépasse l'ordre du développement limité. Il est bon aussi de se souvenir d'éventuelles propriétés de parité (par exemple dans le cas d'un carré). Ici, on aurait aussi pu utiliser $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.

Il se peut que l'on gagne des ordres dans le développement limité du produit. Par exemple, pour avoir le développement limité de $\sin^3 x$ à l'ordre 6, on peut faire

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = x^3 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^3 \\ &= x^3 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^6)\end{aligned}$$

Il est quelquefois utile, comme ici, de mettre des puissances de x en facteur, en se souvenant que $o(x^{d+e}) = x^d o(x^e)$ (toujours quand x tend vers 0, bien sûr).

Conséquence. La partie régulière du développement limité de la partie paire d'une fonction f (définie comme $(f(x) + f(-x))/2$) est la partie paire de la partie régulière du développement limité de $f(x)$. De même pour la partie impaire. En partant de e^x , ceci nous donne

$$\begin{aligned}\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})\end{aligned}$$

Proposition 1.10 (Substitution). *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités au même ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n) \quad g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n),$$

et si $g(0)=0$ alors $f(g(x))$ a un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière s'obtient en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans

$$a_0 + a_1(b_1x + \cdots + b_nx^n) + \cdots + a_n(b_1x + \cdots + b_nx^n)^n.$$

Autrement dit, si $A(x)$ est la partie régulière du développement limité de $f(x)$ et $B(x)$ ($B(0) = 0$) celle de $g(x)$, alors la partie régulière du développement limité de $f(g(x))$ est le tronqué $T_n(A(B(x)))$.

Démonstration: Comme $B(0) = 0$, on peut écrire $B(x) = xB_1(x)$ où B_1 est un polynôme. Mais alors $\underset{x \rightarrow 0}{o}(g(x)^n) = g(x)^n \epsilon(g(x)) = x^n \cdot [B_1(x) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(1)]^n \epsilon(g(x))$ avec $\lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$ et donc

$$\underset{x \rightarrow 0}{o}(g(x)^n) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n).$$

Par ailleurs, pour tout $k \leq n$, on a $g(x)^k = (B(x) + o(x^n))^k = B(x)^k + o(x^n)$. Donc

$$f(g(x)) = A(B(x) + o(x^n)) + o(g(x)^n) = A(B(x)) + o(x^n) = T_n(A(B(x))) + o(x^n).$$

\square

Il faut bien prendre garde à la condition $g(0) = 0$ quand on substitue. La démonstration montre qu'elle est nécessaire pour garder un contrôle sur le reste après substitution. Par exemple, pour calculer le développement limité de $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3, si on écrit

$$e^{\cos x} = 1 + (1 - x^2/2) + \frac{(1 - x^2/2)^2}{2!} + \frac{(1 - x^2/2)^3}{3!} + o(x^3) = \frac{8}{3} - \frac{5}{4}x^2 + o(x^3),$$

ON A TOUT FAUX! En effet, $\cos 0 = 1 \neq 0$. Le calcul correct est

$$e^{\cos x} = e(e^{\cos x - 1}) = e(1 + (-x^2/2) + o(x^3)) = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3).$$

On constate ici que l'on gagne même en précision : on a déjà le développement limité à l'ordre 3 en substituant $\cos x - 1$ dans le développement limité à l'ordre 1 de e^x . Ceci vient du fait que $\cos x - 1 = O(x^2)$ quand $x \rightarrow 0$. Dans le même ordre d'idée, la partie régulière du développement limité de $f(x^2)$ à l'ordre $2n + 1$ en 0 s'obtient en substituant x^2 à x dans la partie régulière du développement limité de $f(x)$ à l'ordre n .

Proposition 1.11 (Quotient). *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités au même ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n),$$

et si $g(0) \neq 0$ alors f/g a aussi un développement limité à l'ordre n .

Démonstration : Sous ces hypothèses, il suffit d'écrire

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{b_0} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)) \frac{1}{1 + \left(\frac{b_1}{b_0}x + \dots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)\right)}$$

puis d'utiliser le développement limité en 0 de $\frac{1}{1+X}$ et les propositions précédentes. \square

Exemple. Calcul du développement limité à l'origine de $\tan x$ à l'ordre 6. On se souvient que \tan est impaire (il y aura des termes en x , x^3 et x^5 uniquement).

On écrit $\tan x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$ avec $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$.

On a alors $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)}$. On part alors du développement de $\frac{1}{1-X}$ en

0 à l'ordre 2 $\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^2\varepsilon(X)$ et on applique le théorème de substitution :

$\frac{1}{\cos x} = T_4 \left(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 \right) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$. Par parité, ce développement est aussi un développement à l'ordre 5. Enfin, on utilise le théorème sur le produit pour obtenir $\tan x = T_5 \left(\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right) \right) + o(x^5)$.

On obtient finalement la formule (qu'il n'est pas mauvais de connaître par coeur)

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)}$$

Proposition 1.12 (Intégration). *Si f a un développement limité à l'ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

et si F est une primitive de f définie sur un intervalle ouvert contenant 0 ($F' = f$), alors $F(x)$ a un développement limité à l'ordre $n + 1$ en 0, qui est

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité à l'ordre $n + 1$ d'une primitive est une primitive de la partie régulière du développement limité à l'ordre n .

Démonstration : Posons

$$B(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \quad G(x) = F(x) - B(x).$$

G est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0,

$$G'(x) = f(x) - (a_0 + \cdots + a_nx^n) = o(x^n) = x^n\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$, et $G(0) = 0$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, $G(x) = xG'(\theta x)$ avec θ dépendant de x , $0 < \theta < 1$. Ainsi

$$G(x) = x(\theta x)^n \epsilon(\theta x) = x^{n+1} \theta^n \epsilon(\theta x) = o(x^{n+1}),$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \theta^n \epsilon(\theta x) = 0$. Au total,

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

□

Exemples. • Ainsi, de $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ on obtient par intégration

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

• De $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$ on tire par intégration

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Exercice. Calculer le développement limité à l'ordre 5 de arcsin en 0.

Corollaire 1.13 (Dérivation). *Si f a un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n),$$

si f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 et si sa dérivée f' a un développement limité à l'ordre $n - 1$ en 0, celui-ci est : $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1})$.

Démonstration : On écrit le développement limité $f'(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$, et on utilise la proposition précédente qui nous donne

$$f(x) = f(0) + b_0x + \frac{b_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n}x^n + o(x^n),$$

et on identifie pour conclure avec $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$. □

On est obligé dans l'énoncé de mettre comme hypothèse l'existence du développement limité de f' à l'ordre $n - 1$. Ceci ne vient pas automatiquement, comme le montre l'exemple donné plus haut d'une fonction qui a un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais qui n'est pas deux fois dérivable. Sa dérivée n'a pas de dérivée en 0, ce qui veut dire qu'elle n'a pas de développement limité d'ordre 1.

1.2.4 Utilisation des développements limités

Les développements limités servent à calculer des limites, ils servent aussi à l'étude des courbes. Pour les calculs, on se ramène toujours à écrire des développements limités en 0.

• Quand on est au voisinage de a , on fait le changement de variable $x = a + h$ et on écrit des développements limités en 0 pour la variable h . Par exemple, pour obtenir le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$ à l'ordre 2, on écrit

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan h}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \tan h} = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = \frac{1 + h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2)}{1 - h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2)} \\ &= (1 + h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2))(1 + h + h^2 + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2)) = 1 + 2h + 2h^2 + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2),\end{aligned}$$

On peut aussi écrire $\tan x = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{o}((x - \frac{\pi}{4})^2)$.

• Au voisinage de l'infini, on utilise le changement de variable $x = 1/t$, et on écrit des développements limités en 0 pour la variable t . Soit par exemple à étudier la branche infinie pour x tendant vers $-\infty$ de la courbe d'équation

$$y = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}.$$

Pour $x < -1$, on a (attention aux signes!)

$$y = x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + x \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}.$$

On pose $t = 1/x$, et on écrit le développement limité de $f(t) = \sqrt[3]{1 + t^2 + t^3} + \sqrt{1 - t - t^2}$ à l'ordre 2 en 0. On a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1 + t^2 + t^3} &= 1 + \frac{1}{3}(t^2 + t^3) + o(t^2) = 1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2) \\ \sqrt{1 - t - t^2} &= 1 + \frac{1}{2}(-t - t^2) - \frac{1}{8}(-t - t^2)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t}{2} - \frac{5t^2}{8} + o(t^2) \\ f(t) &= 2 - \frac{t}{2} - \frac{7t^2}{24} + o(t^2)\end{aligned}$$

et donc, en $-\infty$,

$$y = x \left(2 - \frac{1}{2x} - \frac{7}{24x^2} + \underset{x \rightarrow -\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = 2x - \frac{1}{2} - \frac{7}{24x} + \underset{x \rightarrow -\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y = 2x - 1/2$ est asymptote, et la courbe est au dessus de l'asymptote car $-7/(24x) + \underset{x \rightarrow -\infty}{o}(1/x) > 0$ quand x est « proche de $-\infty$ ».

Les règles de calcul sur les développements limités sont mécaniques, et on peut les programmer : les systèmes de calcul formel permettent de calculer des développements limités sans effort ! Par exemple, demandons au logiciel MAPLE le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$

> `taylor(tan(x), x=Pi/4, 5);`

$$\begin{aligned} & 1 + 2 (x - 1/4 \text{ Pi}) + 2 (x - 1/4 \text{ Pi})^2 + 8/3 (x - 1/4 \text{ Pi})^3 + 10/3 (x - 1/4 \text{ Pi})^4 \\ & + 0((x - 1/4 \text{ Pi})^5) \end{aligned}$$

Remarquer que ce qui est obtenu ici est un développement limité à l'ordre 4, et que le reste est présenté sous forme d'un O et pas d'un o : quand $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$, un $O((x - \frac{\pi}{4})^5)$ est un $o((x - \frac{\pi}{4})^4)$, mais la réciproque n'est pas vraie.

Quand on fait les calculs à la main, il y a des pièges classiques dans lesquels il vaut mieux ne pas tomber. On a signalé plus haut une erreur à éviter dans le cas de substitutions. Un point important à garder à l'esprit est : *à quel ordre sont les développements limités?* Il faut *toujours écrire les restes*, pour garder l'ordre en mémoire. Par exemple une écriture du genre

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

EST ABSOLUMENT A PROSCRIRE. Elle conduit inévitablement à des calculs comme

$$\sin^2 x \approx x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}$$

qui font croire que l'on a ainsi le développement limité de $\sin^2 x$ à l'ordre 6 (que vaut-il en réalité?).

Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Rappels sur les suites numériques

Dans cette section, les principaux résultats sur les suites sont rappelés. Vous en trouverez les démonstrations dans votre cours de Licence 1 ou dans le livre de Jean-Pierre Escofier « Toute l'analyse de la licence ».

Définition 2.1. Une *suite réelle* (ou complexe) est une famille de réels indexée par \mathbb{N} , c'est-à-dire une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) est notée $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** s'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

On dit que la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$.

La suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

La suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.

Une suite réelle est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

2.1.1 Convergence

Définition 2.2. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **convergente** s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Propriétés.

1. Si un tel réel ℓ existe, alors il est unique et appelé limite de la suite. On note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

2. Toute suite convergente est bornée.

3. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes est convergente si et seulement si la suite des parties réelles $(\operatorname{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite des parties imaginaires $(\operatorname{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. En cas de convergence, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n)$.

Théorème 2.3. Toute suite réelle monotone et bornée est convergente.

Définition 2.4. On dit que deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 2.5. Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et ont de plus la même limite.

2.1.2 Suites extraites

Définition 2.6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou une **sous-suite**) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Propriété. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples. $\varphi : n \mapsto 2n$ donne la suite des termes d'indices pairs, $\varphi : n \mapsto 2n + 1$ donne la suite des termes d'indices impairs.

Proposition 2.7. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et de même limite.

Remarque. En conséquence, si on peut extraire deux suites convergentes de limites distinctes d'une suite alors la suite diverge. Par exemple la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. De même, si on peut extraire une sous-suite divergente d'une suite, alors la suite diverge.

Proposition 2.8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite avec $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent vers la même limite ℓ . Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Théorème 2.9 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). De toute suite bornée de réels (ou de complexes), on peut extraire une suite convergente.

2.1.3 Comparaison des suites

Les outils de comparaison introduits pour les fonctions s'utilisent aussi pour les suites.

Définition 2.10 (Domination). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq M|v_n|$. On note alors $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n)$.

La notation O est fréquemment utilisée pour évaluer la complexité d'un algorithme.

Considérons par exemple le problème du tri : ranger par ordre croissant une liste de n nombres. Combien faut-il faire de comparaisons entre nombres ? Ceci dépend de l'algorithme de tri utilisé.

- L'algorithme récursif : si on a trié i nombres, on compare le $(i + 1)$ -ème à ceux déjà triés pour le ranger à la bonne place. On peut avoir à faire (dans le plus mauvais cas) $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = (n - 1)n/2$ comparaisons, ce qui fait $O(n^2)$ comparaisons.

- L'algorithme de « tri-fusion » : on fusionne deux listes déjà triées en comparant les premiers éléments des deux listes, prenant le plus petit et recommençant ; on fait ainsi des listes triées de 2, puis de 4, puis de 8... Le nombre de comparaisons à faire pour fusionner deux listes triées de 2^{i-1} nombres est au plus $2^i - 1$. Si $2^{k-1} < n \leq 2^k$, il y a 2^{k-i} listes de 2^i nombres ou moins. Le nombre de comparaisons à faire pour trier n nombres par l'algorithme de tri-fusion est donc majoré par

$$1 \cdot 2^{k-1} + 3 \cdot 2^{k-2} + \dots + (2^i - 1)2^{k-i} + \dots + (2^k - 1) \dots 1 \leq k 2^k \leq (1 + \log_2 n) 2n.$$

Ceci fait $O(n \ln n)$ comparaisons (vérifier), et c'est négligeable devant n^2 .

Définition 2.11 (Négligeabilité). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable par rapport à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite ε avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n \varepsilon(n)$. Lorsque, à partir d'un certain rang, les v_n sont non nuls, cela revient à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. On note alors $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$.

Définition 2.12 (Équivalence). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes si $u_n - v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ i.e. il existe une suite ε avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n(1 + \varepsilon(n))$. Lorsque, à partir d'un certain rang, les v_n sont non nuls, cela revient à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Propriétés.

1. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} h_n$, alors $u_n w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n h_n$ et $\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$. Attention : on n'a pas nécessairement $u_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n + h_n$.
2. Si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ et $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ alors $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.
3. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ alors $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.
4. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$, alors $u_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$.
5. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\ell \neq 0$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

Montrons par exemple le point 4. Par hypothèses, on peut écrire $u_n = v_n \varphi_n$ et $v_n = w_n \varepsilon_n$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Mais alors $u_n + w_n = w_n (\varepsilon_n \varphi_n + 1)$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon_n \varphi_n + 1) = 1$.

On a donc bien $u_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$.

Les comparaisons de suites viennent souvent de comparaisons de fonctions quand x tend vers $+\infty$. Par exemple si (u_n) et (v_n) sont définies respectivement par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$, et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Exercice. Comparer les suites $(n \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples.

1. $n^\alpha = o_{n \rightarrow +\infty}(n^\beta)$ quand $\alpha < \beta$.
2. $(\ln n)^\alpha = o_{n \rightarrow +\infty}(n^\beta)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$.
3. $n^\alpha = o_{n \rightarrow +\infty}((\ln n)^\beta)$ quand $\alpha < 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$;
4. $n^\alpha = o_{n \rightarrow +\infty}(k^n)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k > 1$. En effet, $\frac{n^\alpha}{k^n} = n^\alpha e^{-n \ln k}$, avec $\ln k > 0$.
5. $k^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!)$ pour $k > 0$.

La propriété est triviale pour $k \in]0, 1]$ car alors la suite $(k^n)_{n \geq 1}$ est bornée. Soit k fixé, on a, pour $n > [2k]$, (où $[.]$ désigne la fonction partie entière),

$$\frac{k^n}{n!} = \frac{k}{1} \times \frac{k}{2} \times \cdots \times \frac{k}{n} = \frac{k^{[2k]}}{[2k]!} \times \frac{k}{[2k] + 1} \times \frac{k}{[2k] + 2} \times \cdots \times \frac{k}{n}$$

Pour $p \geq [2k] + 1$, on a $\frac{k}{p} \leq \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$. Donc, pour $n > [2k]$, on a

$$0 \leq \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^{[2k]}}{[2k]!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-[2k]}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-[2k]} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{n!} = 0$ (théorème des gendarmes).

6. $n! = o_{n \rightarrow +\infty}(n^n)$.

On remarque que, pour $n \geq 2$, on a $n \geq \frac{n}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{n!}{n^n} &= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{[n/2]}{n} \times \frac{[n/2]+1}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 \times \cdots \times 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{[n/2]} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{2}\right] = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Exercice. Montrons que la suite $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminons sa limite.

- Première erreur à éviter : on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$ et donc

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.1 \cdots 1 = 1.$$

Ce raisonnement est faux car derrière les trois petits points se cache un produit dont le nombre de facteurs est n et donc un produit qui devient infini. Le théorème sur le produit des limites ne s'étend pas sans précaution à un produit infini. . .

- Deuxième erreur à éviter : $(1 + \frac{1}{n}) > 1$ et, pour $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ (limite d'une suite géométrique), et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = +\infty$. Ce raisonnement est faux car sous-entend $q = 1 + \frac{1}{n}$ mais q n'est alors pas constant et la suite n'est donc pas géométrique. . .
- Enfin une bonne méthode : posons $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. On a $\ln(u_n) = n \ln(1 + \frac{1}{n})$ et $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n}$. On en déduit $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(u_n) = 1$ et donc, par composition de limites, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \exp(1) = e$.

2.2 Séries

2.2.1 Définitions et convergence

Définition 2.13. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle (ou complexe). On appelle **série** de terme général u_n , notée $\sum u_n$, la suite des **sommes partielles** $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On parle de **série de nombres réels** si tous les u_n sont réels.

On dit que la série **converge** si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Sinon, on dit que la série **diverge**.

En cas de convergence, la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée **somme** de la série et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarque. Parfois la série ne commence pas à 0 mais au rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Les sommes partielles sont alors définies pour $n \geq n_0$ par $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$. La nature (convergente ou divergente) de la série ne dépend pas des premiers termes, mais la valeur de la somme de la série en dépend.

Proposition 2.14. Une série complexe $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries des parties réelles $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et des parties imaginaires $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent. En cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n)$$

Démonstration : En effet, la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des sommes partielles de $\sum u_n$ vérifie, par linéarité,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(u_k).$$

□

Exemples.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$ et on considère la suite constante $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a$. Alors $S_n = (n+1)a$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = 0$.
2. **Série géométrique.** Soit $q \in \mathbb{C}$. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$. On a alors $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

(a) Si $q = 1$, on a $S_n = n + 1$, donc la série diverge.

(b) Si $q \neq 1$, on remarque que $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$ et donc $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Conclusion : La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$

et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$. Par exemple, pour $q = \frac{1}{2}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Remarque. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $|q| < 1$, on a $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1 - q}$.

Cet exemple confirme le fait que les premiers termes d'une série ont une influence sur la valeur de la somme.

Définition 2.15. On appelle **reste d'ordre n** d'une série convergente $\sum u_n$ vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la quantité $R_n = S - S_n$.

Remarque. Si R_n est le reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n$, alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

En effet,

$$R_n = S - S_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^p u_k \right) - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque. La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0. Elle représente la vitesse de convergence de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ vers S .

Par exemple, dans le cas d'une série géométrique $\sum q^n$ avec $|q| < 1$, on a :

$$R_n = \frac{1}{q - 1} - \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

Proposition 2.16. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors $\sum (u_n + v_n)$ et $\sum \lambda u_n$ convergent et on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n + \sum_{k=0}^{+\infty} v_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$$

Attention ! La réciproque est fautive ! Si $\sum (u_n + v_n)$ converge, on n'a pas forcément convergence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$ et $v_n = 1$. On a $\sum (u_n + v_n)$ converge et $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Proposition 2.17 (Condition nécessaire de convergence). Si $\sum u_n$ est une série convergente alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration : On remarque que pour $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Comme $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{n-1})_{n \geq 1}$ convergent vers la même limite, on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. \square

Définition 2.18. Une série $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente** lorsque son terme général ne tend pas vers 0.

2.2.2 Exemples de séries

Les séries de Riemann

- On appelle **série harmonique** la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Cette série diverge. En effet, bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - S_n = 0$. Par conséquent, $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

- D'une manière générale, on appelle **série de Riemann** toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration : • La divergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \leq 1$ résultera de manière immédiate du théorème de comparaison (puisque la série harmonique diverge). • Soit alors $\alpha > 1$. Montrons que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge en montrant la convergence de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On a déjà $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$ donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Montrons que cette suite est majorée. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. $f : x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ est continue sur $[k-1, k]$ et dérivable sur $]k-1, k[$ donc (théorème des accroissements finis) :

$$\exists c \in]k-1, k[, f(k) - f(k-1) = (k - (k-1))f'(c) \text{ c'est à dire } \frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} = -(\alpha-1) \frac{1}{c^\alpha}.$$

Comme $c \in]k-1, k[$, $\frac{1}{c^\alpha} > \frac{1}{k^\alpha}$ et donc $\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right)$. En sommant ces inégalités, pour k allant de 2 à n ,

$$S_n < 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{3^{\alpha-1}} + \dots + \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) = 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) < 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

En conclusion, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc converge. \square

Les séries télescopiques

Définition 2.19. Une série réelle ou complexe $\sum u_n$ est dite **télescopique** s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = a_n - a_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Soit $\sum u_n$ une série télescopique, avec $u_n = a_n - a_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Les sommes partielles vérifient donc

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 + a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \dots + a_n - a_{n-1} = u_0 - a_0 + a_n.$$

Par conséquent, la série $\sum u_n$ et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de même nature. En cas de convergence, le reste d'ordre n vérifie $R_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k - a_n$. La série et la suite ont par conséquent, la même vitesse de convergence.

Exemple. On considère $u_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1}$. On a alors $S_n = \sum_{k=2}^n u_k = 1 - \frac{1}{n}$. La série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ est donc convergente et on a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

2.3 Séries à termes positifs

On considère dans cette section des séries $\sum u_n$ réelles où pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \geq 0$. On dit que la série est à termes positifs (ATP). Il est alors immédiat que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est croissante. En conséquence,

Proposition 2.20. La série à termes positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est majorée.

En cas de convergence, on a alors pour tout n de \mathbb{N} , $S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

En cas de divergence, on a alors $\sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

2.3.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 2.21. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. telles que, pour tout n de \mathbb{N} , $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Le théorème reste vrai s'il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. En cas de convergence, on a alors

$$0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration: On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$. On remarque que pour tout $n \geq 0$, on a $S_n \leq T_n$.

Si $\sum v_n$ converge, alors la suite $(T_n)_{n \geq 0}$ est majorée et donc $(S_n)_{n \geq 0}$ est majorée, donc $\sum u_n$ converge. Le deuxième point du théorème en résulte alors aussi puisqu'il n'est autre que la contraposée du premier. \square

Théorème 2.22 (Théorème d'équivalence). Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, avec $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration : Comme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, on peut écrire $u_n = v_n \varphi_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$.

On en déduit (choix de $\varepsilon = \frac{1}{2}$) l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $1 - \frac{1}{2} \leq \varphi_n \leq 1 + \frac{1}{2}$. En multipliant par $v_n \geq 0$, il vient $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$. D'après le théorème précédent, ceci implique que les deux séries sont de même nature. \square

Exemple.

1. La série télescopique $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge et $\frac{1}{n(n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
2. Comme $\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, la série $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge.

Attention ! Si deux suites positives sont équivalentes, alors leurs séries sont de même nature. Cependant, en cas de convergence, on n'a aucune information sur la valeur des sommes.

Exercice. Montrer que la convergence d'une suite réelle (u_n) est équivalente à la convergence de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$. En déduire que la suite définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ est convergente.

Théorème 2.23 (Critère de d'Alembert). Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs ($u_n > 0$).

1. S'il existe $q \in]0, 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ alors la série $\sum u_n$ converge et pour tout $n \geq n_0$, on a $R_n \leq \frac{u_{n+1}}{1-q}$.
2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration : 1. On a pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq qu_n$ (car $u_n \geq 0$). Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$ (récurrence immédiate). Comme $q \in]0, 1[$, $\sum q^{n-n_0}$ converge, donc (théorème de comparaison) $\sum u_n$ converge. Par ailleurs, pour $n \geq n_0$ et $i \geq 0$, on a $u_{n+1+i} \leq q^i u_{n+1}$. En utilisant le changement d'indice $i = k - (n+1)$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{n+1+i} \leq u_{n+1} \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \text{ et donc pour } n \geq n_0, R_n \leq u_{n+1} \frac{1}{1-q}.$$

2. Pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n \geq u_{n_0}$, donc la suite ne peut pas converger vers 0 et la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement). \square

Conséquence. (Règle de d'Alembert) Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs à partir d'un certain rang telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration : 1. Si $\ell < 1$. On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \varepsilon$ i.e. $\ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon < 1$. D'après le critère de d'Alembert (avec $q = \ell + \varepsilon$), la série $\sum u_n$ converge.

2. Si $\ell > 1$, On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \varepsilon$ i.e. $1 < \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$. D'après le critère de d'Alembert (avec $q = \ell - \varepsilon$), la série $\sum u_n$ diverge. \square

Exemple. Soit $x > 0$. On considère la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{x^n}{n}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{nx}{n+1}$. D'après la règle de d'Alembert, la série est convergente si $x < 1$, divergente si $x > 1$, mais on ne peut pas

conclure avec la règle si $x = 1$. Cependant, on sait déjà que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Remarque. La règle de d'Alembert ne dit rien lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite ni même lorsque cette quantité tend vers 1. Par exemple, $\sum u_n$ diverge lorsque $u_n = \frac{1}{n}$ et converge lorsque $u_n = \frac{1}{n^2}$ et dans les deux cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Théorème 2.24 (Règle de Riemann). *Soit $\sum u_n$ une série réelle (positive).*

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors la série $\sum u_n$ converge.*
2. *S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \ell \neq 0$ alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration: 1. Si $\ell \neq 0$ c'est immédiat puisqu'alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n^\alpha}$ (et donc, au passage, u_n a, à partir d'un certain rang, un signe constant : celui de ℓ). Si $\ell = 0$, par définition on peut considérer un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|n^\alpha u_n| \leq 1$ soit $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

2. C'est immédiat puisqu'encore une fois $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n^\alpha}$. □

Remarque. La convergence absolue entraînant la convergence (voir paragraphe suivant), l'hypothèse de positivité de ce dernier critère est superflue...

2.4 Autres séries - Convergence absolue

2.4.1 Les séries alternées

On parle de série alternée lorsque le terme général est un réel alternativement de signe positif et de signe négatif. Plus précisément,

Définition 2.25. *La série réelle $\sum u_n$ est dite alternée si $(-1)^n u_n$ a un signe indépendant de n .*

Exemples. $\sum (-1)^n$ et $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sont des séries alternées.

Théorème 2.26 (Critère spécial à certaines séries alternées). *Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0 alors la série $\sum u_n$ est convergente.*

Démonstration: Supposons par exemple que $(-1)^n u_n$ est toujours positif. Soit alors $n \geq 2$. $S_n - S_{n-2} = u_{n-1} + u_n = (-1)^{n-1} |u_{n-1}| + (-1)^n |u_n| = (-1)^n (|u_n| - |u_{n-1}|)$ avec $|u_n| - |u_{n-1}| \leq 0$.

- Pour n pair ($n = 2p$), $S_{2p} - S_{2p-2} \leq 0$ donc la suite $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Pour n impair ($n = 2p + 1$), $S_{2p+1} - S_{2p-1} \geq 0$ donc la suite $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- $S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

Les deux suites $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Elles convergent en conséquence vers la même limite S . On en déduit, d'après 2.8, que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers S . □

Exemple. La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Propriétés.

- La somme S d'une série alternée vérifiant le critère précédent est comprise entre deux sommes partielles consécutives.

- Le reste d'ordre n d'une série alternée vérifiant le critère précédent a le signe de son premier terme et est, en valeur absolue, majoré par la valeur absolue de son premier terme.

Démonstration : Le premier point résulte de la démonstration précédente (suites adjacentes) : $S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$. Pour le deuxième, on écrit ces inégalités sous la forme $S_{2p+1} \leq S_{2p} + R_{2p} \leq S_{2p}$ d'où l'on déduit par exemple $u_{2p+1} \leq R_{2p} \leq 0$ et $|R_{2p}| = -R_{2p} \leq -u_{2p+1} = |u_{2p+1}|$. \square

Exemple. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Remarque. Lorsqu'une série alternée ne vérifie pas les hypothèses du théorème précédent, on peut essayer de décomposer le terme général en une somme de deux termes, l'un vérifiant ces hypothèses, l'autre restant à étudier.

2.4.2 Séries absolument convergentes

Définition 2.27. Une série réelle ou complexe $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série réelle $\sum |u_n|$ converge, où $|\cdot|$ représente le module.

Proposition 2.28. Toute série absolument convergente est convergente. En cas de convergence, on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration : • Supposons pour commencer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ soit à valeurs réelles. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, où $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ (le vérifier en distinguant les cas $u_n \geq 0$ et $u_n \leq 0$). De plus,

$$0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq u_n^- \leq |u_n|.$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, par le théorème de comparaison 2.3.1, on déduit que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Par ailleurs $u_n = u_n^+ - u_n^-$ (le vérifier en distinguant les cas $u_n \geq 0$ et $u_n \leq 0$) et donc la série $\sum u_n$ converge.

• Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est à valeurs complexes, on introduit $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ les suites des parties réelles et des parties imaginaires de $(u_n)_{n \geq 0}$. Comme,

$$0 \leq |a_n| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq |b_n| \leq |u_n|,$$

la convergence de $\sum |u_n|$ entraîne celle de $\sum |a_n|$ et de $\sum |b_n|$. Du cas réel, on déduit que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, et donc $\sum u_n$ converge.

• En cas de convergence, on $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$ (inégalité triangulaire) et chacune de ces deux quantités a une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. La fonction valeur absolue étant continue, on a donc à la limite $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. \square

Remarque. La réciproque est fautive (voir exemples). Une série convergente mais non absolument convergente est parfois dite *semi-convergente*.

Proposition 2.29. Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe. Soit $\sum v_n$ une série absolument convergente. Si $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ (a fortiori si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$) alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Démonstration : Comme $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq M|v_n|$. Il suffit alors d'utiliser le théorème de comparaison 2.3.1 pour en déduire que $\sum u_n$ est absolument convergente. \square

Exemples. 1. La série $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ est absolument convergente car $\frac{\sin(n)}{n^2} = O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

2. La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

3. Soit $x \in \mathbb{C}$. On considère la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{x^n}{n!}$. Pour $x \neq 0$, on remarque que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|}{n+1}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.30. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est absolument convergente.

Exercice. Démontrer cette proposition.

2.5 Représentation décimale des réels

Définition 2.31. On appelle **développement décimal** d'un réel x toute suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers vérifiant :

$$d_0 \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 1 \quad d_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = x$$

On note alors $x = d_0, d_1 d_2 \cdots d_n \cdots$.

On appelle **développement décimal propre** d'un réel x tout développement décimal ne comportant pas que des 9 à partir d'un certain rang. Le développement est dit **impropre** dans le cas contraire.

Théorème 2.32.

Tout réel non décimal admet un unique développement décimal et ce développement est propre. Tout nombre décimal non nul admet deux développements décimaux distincts, l'un propre et l'autre impropre.

Démonstration : On note E la fonction partie entière. Soit x un réel.

• **Existence :** On pose $a_0 = d_0 = E(x)$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n = E(10^n x) \quad x_n = \frac{a_n}{10^n} \quad y_n = x_n + \frac{1}{10^n} \quad \text{et} \quad d_n = (x_n - x_{n-1}) \cdot 10^n = a_n - 10a_{n-1}$$

On dit que x_n est **l'approximation décimale par défaut** de x à 10^{-n} près.

• Montrons que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, de limite commune x .

Il est déjà clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$ puisque, pour tout entier $n \geq 1$, $y_n - x_n = \frac{1}{10^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1$ donc $10a_n \leq 10^{n+1}x < 10a_n + 10$. Puisque a_n est entier, par définition de la partie entière, $10a_n \leq E(10^{n+1}x) < 10a_n + 10$. En divisant par 10^{n+1} la première inégalité, il vient alors : $x_n \leq x_{n+1}$: la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, $E(10^{n+1}x) < 10a_n + 10$ entraîne $E(10^{n+1}x) \leq 10a_n + 9$ et donc, en divisant par 10^{n+1} , $x_{n+1} \leq x_n + \frac{9}{10^{n+1}}$. En ajoutant $\frac{1}{10^{n+1}}$, il vient $y_{n+1} \leq x_n + 10^{-n} = y_n$: la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Enfin, $E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1$ entraîne $x_n \leq x < y_n$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x$.

• Montrons que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$. Il s'agit d'une série télescopique. $\sum_{k=1}^n \frac{d_k}{10^k} = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0$

et donc $\sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k} = x_n$. Le résultat en découle.

- Montrons que $\forall n \geq 1 \quad d_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $10a_n \leq a_{n+1} \leq 10a_n + 9$ donc $0 \leq a_{n+1} - 10a_n = d_{n+1} \leq 9$. Enfin, d_0 est entier et, pour $n \geq 1$, $d_n = a_n - 10a_{n-1}$ l'est aussi.

- Montrons que, lorsque x n'est pas décimal, tout développement décimal de x est propre. Supposons par l'absurde que tous les d_k sont égaux à 9 à partir du rang m . On a alors $x = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{d_n}{10^n} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{d_n}{10^n} + \frac{9}{10^m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$ et donc $x = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{d_n}{10^n} + \frac{1}{10^{m-1}}$ est décimal, ce qui est exclu.

- **Unicité** : Soit x un réel admettant deux développements décimaux distincts $x = d_0, d_1 d_2 \dots$ et $x = d'_0, d'_1 d'_2 \dots$ où les suites (d_n) et (d'_n) sont distinctes, telles que d_0 et d'_0 soient entiers relatifs et d_n et d'_n soient éléments de $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ pour $n \geq 1$. Posons $x'_n = \sum_{k=0}^n \frac{d'_k}{10^k}$.

Soit $m = \text{Min}\{n \in \mathbb{N}, d'_n \neq d_n\}$. Supposons par exemple que $d'_m < d_m$.

- Montrons que $d_m - d'_m = 1$.

Pour $n > m$, on a, avec les notations précédentes, $x_n - x'_n = \frac{d_m - d'_m}{10^m} + \sum_{k=m+1}^n \frac{d_k - d'_k}{10^k}$.

Mais les suites (x_n) et (x'_n) convergent vers x . Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x'_n) = 0$ et donc :

$\frac{1}{10^m} \leq \frac{d_m - d'_m}{10^m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=m+1}^n \frac{d'_k - d_k}{10^k}$ (car $d_m - d'_m \geq 1$). Mais d'autre part,

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{d'_k - d_k}{10^k} \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{m+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^{n-m}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^m}$$

et donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=m+1}^n \frac{d'_k - d_k}{10^k} \leq \frac{1}{10^m}$. Finalement, $\frac{d_m - d'_m}{10^m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=m+1}^n \frac{d'_k - d_k}{10^k} = \frac{1}{10^m}$.

Donc $d_m - d'_m = 1$ (c'est-à-dire que, à la première décimale qui diffère, il y a 1 d'écart entre les deux décimales).

- Montrons que : $\forall n \geq m + 1, d'_n = 9$ et $d_n = 0$.

Pour tout $n \geq m + 1$ on a $d'_n - d_n \leq 9$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=m+1}^n \frac{d'_k - d_k}{10^k} = \frac{1}{10^m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=m+1}^n \frac{9}{10^k}$

donc, pour $n \geq m + 1, d'_n - d_n = 9$ et donc $d_n = 0$ (et en particulier x est nécessairement décimal) et $d'_n = 9$.

- Concluons. Si x n'est pas décimal, on ne peut avoir $\forall n \geq m + 1, d_n = 0$ et on a donc montré par l'absurde l'unicité du développement décimal de x .

Enfin, si x est décimal, le point précédent montre que x admet au plus deux développements décimaux. Or, x étant décimal (non nul), il admet une écriture de la forme $x = \sum_{k=0}^m \frac{d_k}{10^k}$ où d_m

est non nul mais, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=m+1}^n \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^m}$, on a aussi $x = d_0, d_1 \dots d_{m-1} (d_m - 1) 999 \dots$.

□

Exercice. Montrer qu'un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

2.6 Complément : exemples de calcul de la somme d'une série convergente

Les théorèmes des sections précédentes permettent de savoir si une série converge ou pas. Malheureusement, en cas de convergence, il est en général très difficile d'identifier la valeur de la somme. On va voir quelques exemples où la somme de la série est facilement identifiable.

2.6.1 Premier exemple

Considérons la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$, pour $n \geq 2$.

La série converge car $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Soit $n \geq 2$. La décomposition en éléments simples donne $u_n = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}$. Il ne s'agit pas exactement d'une série télescopique. Cependant, on remarque que,

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \right)$$

Utilisons les changements d'indice $i = k - 1$ dans la première somme et $j = k + 1$ dans la seconde somme, on a alors

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Il suffit maintenant de faire tendre n vers $+\infty$ pour identifier la somme. On obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}.$$

On a $\frac{1}{n^2 - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}$, mais ceci ne donne aucune information sur la valeur de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. En fait, il est possible de montrer, par d'autres techniques, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.6.2 Deuxième exemple

Considérons la série de terme général $u_n = nq^n$, avec q un complexe de module $|q| < 1$. On remarque que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}q$. La suite $\left(\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $|q|$. Comme $|q| < 1$, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum nq^n$ converge absolument.

On souhaite calculer la somme de cette série. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 S_N &= \sum_{n=0}^N nq^n = \sum_{n=1}^N nq^n = q \sum_{n=1}^N nq^{n-1} \\
 &= q \sum_{n=1}^N (1 + (n-1))q^{n-1} \\
 &= q \left(\sum_{n=1}^N q^{n-1} + \sum_{n=1}^N (n-1)q^{n-1} \right) \\
 &= q \left(\sum_{k=0}^{N-1} q^k + \sum_{k=0}^{N-1} kq^k \right) \text{ en utilisant le changement d'indice } k = n-1 \\
 &= q \left(S_N - Nq^N + \sum_{k=0}^{N-1} q^k \right).
 \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient $S = q(S + \frac{1}{1-q})$ soit finalement $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Chapitre 3

Intégrale de Riemann

3.1 Continuité uniforme

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc, pour x dans $]0, +\infty[$, si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x' > 0$ avec $|x - x'| < \delta$, on a $|1/x - 1/x'| < \varepsilon$. Si on prend $\varepsilon = 1$, on doit avoir $\delta > 0$ tel que si $x' > 0$ et $|x - x'| < \delta$, alors $|1/x - 1/x'| < 1$. En particulier si on prend $x' = x + \delta/2$, on doit avoir

$$1 > \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \delta/2} \right| = \frac{\delta}{(2x + \delta)x}.$$

Or, quand x tend vers 0, cette dernière quantité tend vers $+\infty$! Où est le truc ? La faute dans le raisonnement précédent est que l'on fait comme si δ ne dépendait pas de x : ce n'est pas ce que dit la définition de la continuité sur $]0, +\infty[$. Demander que δ soit indépendant de x amène à une nouvelle notion : la continuité uniforme.

Définition 3.1. Soit f une fonction réelle définie sur la partie D de \mathbb{R} . On dit que f est **uniformément continue sur D** quand pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tous x et x' dans D , si $|x - x'| < \delta$, alors $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \forall x' \in D, |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Ici δ ne dépend que de ε . Comparez l'ordre des quantificateurs avec la définition de la continuité sur D . La notion de continuité uniforme n'a pas de sens en un point : c'est une notion globale et non pas locale. Le raisonnement faux du début montre tout de même que la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

Remarque. Bien évidemment, une fonction uniformément continue sur D est continue sur D .

Théorème 3.2 (Heine). Une fonction réelle continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur ce segment.

Démonstration : Soit f continue sur $[a, b]$. On suppose que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Ceci s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in [a, b], \exists x' \in [a, b], |x - x'| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$$

Dans la suite, on fixe un $\varepsilon > 0$ qui vérifie cette formule. Pour tout entier naturel n , en faisant $\delta = 1/2^n$, on peut trouver u_n et v_n dans $[a, b]$ tels que $|u_n - v_n| \leq 1/2^n$ et que $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$. La suite (u_n) est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut en extraire une suite $(s_n = u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge. Sa limite $\ell = \lim s_n$ est dans $[a, b]$ (qui est fermé). La suite $(t_n = v_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a aussi ℓ pour limite car

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |s_n - t_n| = |u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}| < 1/2^{\varphi(n)} \leq 1/2^n \quad \text{puisque } \varphi(n) \geq n$$

Grâce à la caractérisation séquentielle de la continuité de f en ℓ (qui est dans $[a, b]$), on peut passer à la limite dans l'inégalité large $|f(s_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$, ce qui nous donne $|f(\ell) - f(\ell)| \geq \varepsilon > 0$, qui est l'absurdité recherchée. \square

Un des intérêts de la continuité uniforme est que cela montre que l'on peut approcher des fonctions continues sur un segment par des fonctions « en escalier ». Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, et fixons $\varepsilon > 0$. D'après le théorème qui précède, on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tous x et x' de $[a, b]$, $|x - x'| < \delta$ entraîne $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Choisissons un entier naturel N tel que $(b - a)/N < \delta$, et divisons $[a, b]$ en N segments égaux I_1, \dots, I_N . Pour chaque petit segment I_k on pose $m_k = \inf(f(I_k))$ et $M_k = \sup(f(I_k))$. Comme ces bornes sont atteintes sur I_k et que la longueur de I_k est plus petite que δ , on a $M_k - m_k < \varepsilon$. On a donc deux « escaliers » qui encadrent la fonction f sur $[a, b]$. Supposons $f \geq 0$, les aires de ces deux escaliers encadrent l'aire sous le graphe de f à moins de $(b - a)\varepsilon$ près, ce qui peut être rendu aussi petit que l'on veut par le choix de ε .

3.2 Continuité par morceaux

On se donne un intervalle fermé borné $[a, b]$ de \mathbb{R} .

Définition 3.3. On appelle *subdivision* de l'intervalle $[a, b]$ toute famille finie de réels $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$. On appelle *pas* de la subdivision X le réel positif $p(X) = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$. Enfin, on dit que la subdivision Y est **plus fine** que la subdivision X quand X est un sous-ensemble de Y .

Remarques.

- Une subdivision $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ permet de découper l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ pour $i = 1, \dots, n$. Si ces n intervalles ont la même longueur, la subdivision est dite **régulière** et on a alors $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$.
- Si X et Y sont deux subdivisions de $[a, b]$, alors la subdivision $X \cup Y$ est plus fine à la fois que X et que Y .

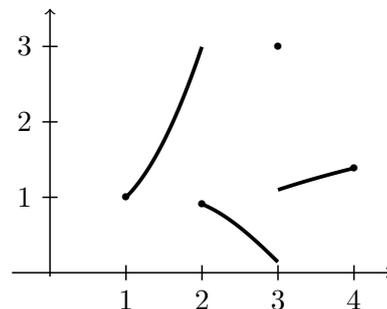
Définition 3.4. On dit qu'une fonction f à valeurs réelles est **continue par morceaux** sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ ait un prolongement par continuité $g_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemples.

La fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [1, 2[\\ \sin x & \text{si } x \in [2, 3[\\ 3 & \text{si } x = 3 \\ \ln x & \text{si } x \in]3, 4] \end{cases}$$

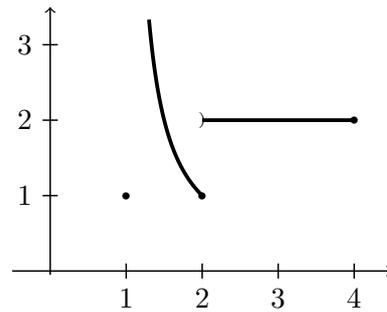
est continue par morceaux sur $[1, 4]$.



Par contre, la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in]1, 2] \\ 2 & \text{si } x \in]2, 4] \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux sur $[2, 4]$. Elle n'est en effet pas prolongeable par continuité sur $[1, 2]$.



Définition 3.5. Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction f à valeurs réelles est **continue par morceaux** sur I si, pour tout $[a, b] \subset I$, f est continue par morceaux sur $[a, b]$. On note $C_m(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I .

Remarque. Une fonction continue sur l'intervalle I est bien sûr continue par morceaux sur I .

3.3 Construction de l'intégrale sur un intervalle fermé borné

3.3.1 Sommes de Darboux

On se donne un intervalle fermé borné $[a, b]$ de \mathbb{R} . Soit f une fonction réelle définie et bornée sur $[a, b]$. Soit $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. On pose, pour $i = 1, \dots, n$

$$m_i = \inf\{f(x), x \in [a_{i-1}, a_i]\} \quad M_i = \sup\{f(x), x \in [a_{i-1}, a_i]\}.$$

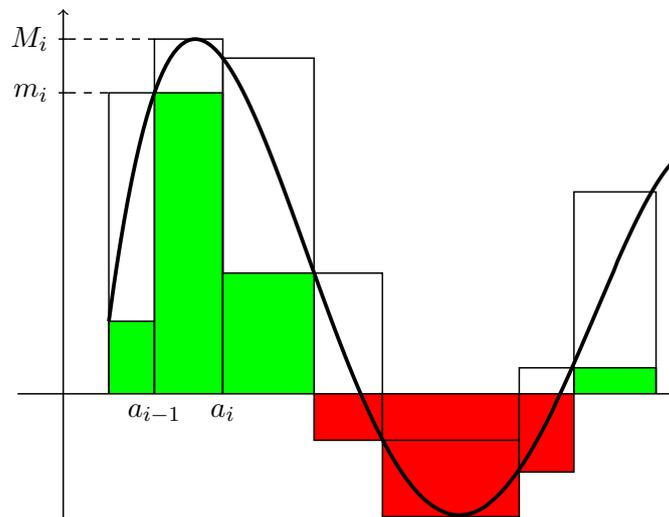
Ces bornes inférieures et supérieures existent bien parce qu'on a supposé f bornée sur $[a, b]$, et donc a fortiori sur chaque $[a_{i-1}, a_i]$.

Définition 3.6. On appelle **somme de Darboux inférieure** pour la fonction f et la subdivision X la somme $s(f, X) = \sum_{i=1}^n m_i(a_i - a_{i-1})$.

On appelle **somme de Darboux supérieure** pour la fonction f et la subdivision X la somme

$$S(f, X) = \sum_{i=1}^n M_i(a_i - a_{i-1}).$$

L'idée de la définition des sommes de Darboux est d'encadrer l'aire « sous le graphe de f » par deux sommes d'aires de rectangles, une « par en-dessous » (somme de Darboux inférieure) et l'autre « par au-dessus » (somme de Darboux supérieure).



Subdivision et sommes de Darboux : la somme de Darboux inférieure est la somme des aires des rectangles, comptés positivement pour ceux coloriés en vert et négativement pour ceux coloriés en rouge

Proposition 3.7. 1) Si la subdivision Y est plus fine que la subdivision X , alors on a :
 $s(f, X) \leq s(f, Y)$ et $S(f, X) \geq S(f, Y)$.
 2) Pour toutes subdivisions X et Y , on a $s(f, X) \leq S(f, Y)$.

Démonstration : Montrons d'abord 1). Pour cela, il suffit de considérer ce qui se passe quand on ajoute un point à la subdivision X , par exemple quand on intercale c avec $a_{i-1} < c < a_i$. Posons

$$\ell_1 = \inf\{f(x), x \in [a_{i-1}, c]\} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \inf\{f(x), x \in [c, a_i]\}$$

On a bien évidemment $m_i \leq \ell_1$ et $m_i \leq \ell_2$ (on peut même vérifier que $m_i = \min(\ell_1, \ell_2)$). Donc

$$m_i(a_i - a_{i-1}) \leq \ell_1(c - a_{i-1}) + \ell_2(a_i - c),$$

Les autres termes des deux sommes étant deux à deux identiques, cela entraîne finalement que $s(f, X) \leq s(f, X \cup \{c\})$. On vérifie de manière analogue que $S(f, X) \geq S(f, X \cup \{c\})$.

Montrons maintenant 2). D'après la première partie, on a $s(f, X) \leq s(f, X \cup Y)$ et aussi $S(f, X \cup Y) \leq S(f, Y)$. Comme il est clair que $s(f, X \cup Y) \leq S(f, X \cup Y)$, on a bien finalement $s(f, X) \leq S(f, Y)$. \square

3.3.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

On suppose toujours la fonction réelle f bornée sur $[a, b]$

Proposition 3.8. On pose

$$\begin{aligned} s(f) &= \sup\{s(f, X), X \text{ subdivision de } [a, b]\}, \\ S(f) &= \inf\{S(f, X), X \text{ subdivision de } [a, b]\}. \end{aligned}$$

Ces bornes inférieures et supérieures sont bien définies, et on a $s(f) \leq S(f)$.

Démonstration : Si Y est n'importe quelle subdivision de $[a, b]$, on a, d'après le 2) de la proposition précédente, $S(f, Y) \geq s(f, X)$. L'ensemble (non vide) des $s(f, X)$ est majoré par $S(f, Y)$, et donc il a une borne supérieure $s(f)$ qui est inférieure ou égale à $S(f, Y)$. Ainsi l'ensemble (non vide) des $S(f, Y)$ est minoré par $s(f)$, et il a donc une borne inférieure $S(f)$, qui vérifie $s(f) \leq S(f)$. \square

Définition 3.9. La fonction f est dite **intégrable au sens de Riemann** sur l'intervalle $[a, b]$ quand $s(f) = S(f)$. Son **intégrale** sur $[a, b]$ est alors cette valeur commune $s(f) = S(f)$, et on la note

$$\int_a^b f(x) dx$$

Le x est une *variable muette*, on peut le remplacer par n'importe quel autre nom, comme $\int_a^b f(u) du$. On utilisera aussi les notations $\int_a^b f$ et $\int_{[a, b]} f$.

Exemple. La fonction constante égale à λ sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b \lambda dt = \lambda(b - a).$$

En effet, pour toute subdivision X de $[a, b]$, $s(f, X) = \lambda(b - a) = S(f, X)$.

L'idée dans la définition des fonctions intégrables est que l'encadrement entre les sommes de Darboux inférieures et les sommes de Darboux supérieures peut être rendu aussi précis que l'on veut, déterminant ainsi un réel unique. Il est commode d'utiliser le critère d'intégrabilité suivant :

Proposition 3.10 (Critère de Riemann-intégrabilité). Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a, b]$. La fonction f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe une subdivision X de $[a, b]$ telle que $S(f, X) - s(f, X) < \epsilon$.

Démonstration : Supposons f intégrable, et donnons nous $\epsilon > 0$. D'après la définition de borne supérieure, il existe une subdivision Y de $[a, b]$ telle que $s(f, Y) > \int_a^b f(x) dx - \frac{\epsilon}{2}$. De même, il existe une subdivision Z telle que $S(f, Z) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\epsilon}{2}$. En posant $X = Y \cup Z$, on obtient

$$S(f, X) - s(f, X) \leq S(f, Z) - s(f, Y) < \epsilon.$$

Réciproquement, supposons le critère vérifié. Pour tout $\epsilon > 0$, on peut donc trouver une subdivision X telle que $S(f, X) - s(f, X) < \epsilon$, et donc comme $s(f, X) \leq s(f) \leq S(f) \leq S(f, X)$ on a $S(f) - s(f) < \epsilon$. Comme ceci doit avoir lieu pour tout $\epsilon > 0$, c'est que $s(f) = S(f)$ et donc que f est intégrable sur $[a, b]$. \square

Proposition 3.11 (Caractérisation de l'intégrale de Riemann). *Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a, b]$. La fonction f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si la différence des sommes de Darboux $S(f, X) - s(f, X)$ tend vers 0 quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a, b]$ tend vers 0. $\int_a^b f(t) dt$ est alors la limite des sommes de Darboux supérieures $S(f, X)$ (ou inférieures $s(f, X)$) quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a, b]$ tend vers 0.*

Démonstration : • La condition est suffisante d'après la proposition précédente. En effet, pour $\epsilon > 0$ fixé, l'hypothèse assure l'existence de $\delta > 0$ tel que $p(X) < \delta \implies S(f, X) - s(f, X) < \epsilon$. Le choix d'une subdivision régulière de pas $\frac{b-a}{n} < \delta$ assure alors que $S(f, X) - s(f, X) < \epsilon$.

• Etudions la réciproque.

f étant bornée, on peut écrire : $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$. Notons alors $A = M - m$. Soit maintenant $\epsilon > 0$. Toujours d'après la proposition précédente, il existe une subdivision $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ telle que $S(f, X) - s(f, X) < \frac{\epsilon}{2}$. Soit alors Y une subdivision dont le pas est strictement inférieur à $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$. Chaque intervalle de Y contenant au plus l'un des a_i , il y a exactement $n+1$ intervalles de Y qui contiennent un élément de X et chacun des autres intervalles de Y est inclus dans un intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ de X . On a donc $S(f, Y) - s(f, Y) \leq S(f, X) - s(f, X) + (n+1)p(Y)A$. Par suite, si $p(Y) < \inf(\delta, \frac{\epsilon}{2A(n+1)})$ alors $S(f, Y) - s(f, Y) \leq \epsilon$ d'où le résultat.

Enfin, pour toute subdivision X , $s(f, X) \leq s(f) = \int_a^b f(t) dt = S(f) \leq S(f, X)$ donc par exemple $0 \leq \int_a^b f(t) dt - s(f, X) \leq S(f, X) - s(f, X)$ et par suite $\lim_{p(X) \rightarrow 0} s(f, X) = \int_a^b f$. \square

3.3.3 Sommes de Riemann

Définition 3.12. *Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle **somme de Riemann** de f relativement à X toute somme de la forme $R(f, X) = \sum_{i=1}^n f(\theta_i)(a_i - a_{i-1})$ avec, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, $\theta_i \in [a_{i-1}, a_i]$.*

Proposition 3.13. *Soit f une fonction réelle intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Alors toute somme de Riemann $R(f, X)$ tend vers $\int_a^b f(t) dt$ quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a, b]$ tend vers 0.*

Démonstration : Clair puisque $s(f, X) \leq R(f, X) \leq S(f, X)$. \square

Remarque. On choisira souvent une subdivision de $[a, b]$ en intervalles de même longueur $X_n = \{a_0, \dots, a_n\}$ avec $a_i = a + i(b - a)/n$ (pour n entier strictement positif).

Lorsque f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, on a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\theta_i) = \int_a^b f(x) dx$.

En particulier,

$$\text{Si } f \text{ est Riemann-intégrable sur } [a, b], \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

Exemple. On veut calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Si on pose $f(x) = \sqrt{x}$, on peut réécrire le terme général de la suite comme

$$\frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n f\left(0 + i \frac{1-0}{n}\right)$$

et on reconnaît une somme de Riemann pour f sur $[0, 1]$. Comme f est intégrable sur $[0, 1]$ (voir plus loin), la limite est

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3.3.4 Intégration des fonctions à valeurs complexes

Définition 3.14. Une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite intégrable sur $[a, b]$ si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont intégrables sur $[a, b]$ et on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

De même, une fonction à valeurs complexes est dite continue si ses parties réelle et imaginaire sont continues.

L'intégrale des fonctions à valeurs complexes héritera de nombreuses propriétés de l'intégrale des fonctions réelles (linéarité, relation de Chasles, passage au module ...)

3.4 Classes de fonctions intégrables au sens de Riemann

Proposition 3.15 (Fonctions continues). Toute fonction continue sur le segment $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Démonstration : On sait déjà que si f est continue sur $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$. On sait aussi, par le théorème de Heine, que f est uniformément continue. Donc, quand on se donne $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous x, y de $[a, b]$, si $|x - y| < \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$. Fixons un entier $n > (b-a)/\eta$. Sur chaque segment $[a_{i-1}, a_i]$ découpé par la subdivision régulière $X_n = \{a_0, \dots, a_n\}$ (où $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$), la fonction f atteint sa borne inférieure m_i et sa borne supérieure M_i : on a $m_i = f(x_i)$ et $M_i = f(y_i)$, et comme x_i et y_i appartiennent tous les deux à l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ de longueur $(b-a)/n < \eta$, on doit avoir $M_i - m_i < \varepsilon/(b-a)$. Donc

$$S(f, X_n) - s(f, X_n) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \frac{b-a}{n} < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

et le critère d'intégrabilité est vérifié.

On remarque qu'on a en fait montré que les deux suites $(s(f, X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S(f, X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont $\int_a^b f$ comme limite commune quand n tend vers l'infini. \square

Proposition 3.16 (Fonctions monotones). *Toute fonction monotone sur le segment $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration : On va traiter le cas de f croissante (et non constante). Tout d'abord, f est bornée sur $[a, b]$ puisque pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. On utilise la subdivision régulière X_n introduite ci-dessus. Puisque f est croissante, la borne supérieure (respectivement inférieure) de f sur $[a_{i-1}, a_i]$ est $f(a_i)$ (resp. $f(a_{i-1})$). On a donc

$$s(f, X_n) = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(a_{i-1}), \quad S(f, X_n) = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(a_i).$$

Ceci donne $S(f, X_n) - s(f, X_n) = (f(b) - f(a))(b-a)/n$. Si on se donne $\varepsilon > 0$, alors en choisissant l'entier $n > (f(b) - f(a))(b-a)/\varepsilon$, on obtient $S(f, X_n) - s(f, X_n) < \varepsilon$. Le critère d'intégrabilité est bien vérifié. \square

Définition 3.17. *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **en escalier** s'il existe une subdivision $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ soit constante. La subdivision X est alors dite **adaptée** à f .*

Proposition 3.18 (Intégrale des fonctions en escalier).

Toute fonction en escalier $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. De plus, si $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à φ c'est à dire telle que φ soit constante égale à λ_i sur $]a_{i-1}, a_i[$, alors $\int_a^b \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1})$.

Démonstration : φ étant bornée, on peut encore écrire : $\forall x \in [a, b]$, $m \leq \varphi(x) \leq M$ et noter $A = M - m$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{k} < \min_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$. Considérons la subdivision X'_k de $[a, b]$ définie par :

$$a'_0 = a_0 < a'_1 = a_0 + \frac{1}{k} < a'_2 = a_1 - \frac{1}{k} < \dots < a'_{2n} = a_n - \frac{1}{k} < a'_{2n+1} = a_n$$

et posons $\Delta = S(\varphi, X'_k) - s(\varphi, X'_k)$. La subdivision X'_k comporte :

- n intervalles du type $[a_{i-1} + \frac{1}{k}, a_i - \frac{1}{k}]$ sur lesquels φ est constante ($m' = M' = \lambda_i$) et qui apportent donc une contribution nulle à Δ .
- $n - 1$ intervalles du type $[a_i - \frac{1}{k}, a_i + \frac{1}{k}]$ (donc de longueur $\frac{2}{k}$) qui apportent chacun à Δ une contribution majorée par $\frac{2}{k}A$.
- les intervalles $[a_n - \frac{1}{k}, a_n]$ et $[a_0, a_0 + \frac{1}{k}]$ qui apportent chacun une contribution majorée par $\frac{1}{k}A$.

Finalement, $S(\varphi, X'_k) - s(\varphi, X'_k) \leq \frac{2An}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ et φ est bien intégrable.

Ce raisonnement montre d'autre part que $s(\varphi, X'_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1} - \frac{2}{k}) + B$ avec $|B| \leq \frac{2Mn}{k}$

et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} s(\varphi, X'_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1})$.

Comme le pas de X'_k ne tend pas vers 0, on ne peut pas conclure à ce stade. On considère alors une subdivision plus fine $X''_k = \{a_0, a_0 + \frac{1}{k}, a_0^1, a_0^2, \dots, a_0^{\alpha_0}, a_1 - \frac{1}{k}, \dots, a_n - \frac{1}{k}, a_n\}$ obtenue en subdivisant chaque $[a_i + \frac{1}{k}, a_{i+1} - \frac{1}{k}]$ à l'aide de points $a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{\alpha_i}$ tels que $a_i^j - a_i^{j-1} < \frac{1}{k}$. En notant $a_i^0 = a_i + \frac{1}{k}$ et $a_i^{\alpha_i+1} = a_{i+1} - \frac{1}{k}$, la contribution totale de ces sous-intervalles de $[a_i + \frac{1}{k}, a_{i+1} - \frac{1}{k}]$ à $s(\varphi, X''_k)$ est $\sum_{j=1}^{\alpha_i+1} (a_i^j - a_i^{j-1}) \lambda_i = (a_{i+1} - a_i - \frac{2}{k}) \lambda_i$. On a donc $s(\varphi, X''_k) = s(\varphi, X'_k)$ et le résultat s'en déduit puisque $p(X''_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. \square

Théorème 3.19 (Fonctions continues par morceaux). *Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. De plus, si la subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ est telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ ait un prolongement par continuité $g_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, alors :*

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i(t) dt$$

Démonstration : Cela résultera de la proposition 3.22 et de la relation de Chasles (énoncées et démontrées plus loin). \square

3.5 Opérations sur les fonctions intégrables

Proposition 3.20 (Linéarité de l'intégrale). *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, et soit λ un nombre réel. Alors :*

1. $f + g$ est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$,
2. λf est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

Démonstration : Montrons 1. Si X est une subdivision de $[a, b]$, on a sur chaque intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ l'inégalité

$$\inf\{(f + g)(x), x \in [a_{i-1}, a_i]\} \geq \inf\{f(x), x \in [a_{i-1}, a_i]\} + \inf\{g(x), x \in [a_{i-1}, a_i]\}.$$

En effet, le terme de droite de l'inégalité est un minorant de $f + g$ sur $[a_{i-1}, a_i]$. En sommant ces inégalités (après multiplication par $a_i - a_{i-1} > 0$), on obtient $s(f + g, X) \geq s(f, X) + s(g, X)$. De manière symétrique on a $S(f + g, X) \leq S(f, X) + S(g, X)$. On en déduit donc

$$0 \leq S(f + g, X) - s(f + g, X) \leq S(f, X) - s(f, X) + S(g, X) - s(g, X)$$

Puisque f et g sont intégrables sur $[a, b]$, le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 lorsque $p(X)$ tend vers 0. Il en est donc de même de $S(f + g, X) - s(f + g, X)$ et $f + g$ est donc intégrable. De plus,

$$s(f, X) + s(g, X) \leq s(f + g, X) \leq \int_a^b (f + g) \leq S(f + g, X) \leq S(f, X) + S(g, X)$$

En passant à la limite dans ces inégalités on obtient bien $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Montrons 2. On exclut le cas $\lambda = 0$ qui est trivial. En supposant $\lambda > 0$, on a pour toute subdivision X les égalités $s(\lambda f, X) = \lambda s(f, X)$ et $S(\lambda f, X) = \lambda S(f, X)$. Si $\lambda < 0$, la multiplication par λ renverse les inégalités et donc $s(\lambda f, X) = \lambda S(f, X)$ et $S(\lambda f, X) = \lambda s(f, X)$.

Comme f est intégrable sur $[a, b]$, $\lim_{p(X) \rightarrow 0} s(f, X) = \int_a^b f = \lim_{p(X) \rightarrow 0} S(f, X)$. Par suite,

$\lim_{p(X) \rightarrow 0} s(\lambda f, X) = \lambda \int_a^b f = \lim_{p(X) \rightarrow 0} S(\lambda f, X)$ ce qui montre que λf est intégrable et que son intégrale est λ fois celle de f . \square

Nous admettrons par ailleurs le résultat suivant :

Théorème 3.21. *Si f_1 et f_2 sont des fonctions bornées intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, le produit $f_1 f_2$ est aussi intégrable.*

Conséquence. Comme on sait, par ailleurs, que $f_1 + f_2$ est intégrable, on déduit : L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur le segment $[a, b]$ est un anneau.

Proposition 3.22. *Si la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ et si g est obtenue à partir de f en modifiant la valeur de f en un nombre fini de points de $[a, b]$, alors g est aussi intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.*

Démonstration : Supposons que g diffère de f uniquement en les points c_1, c_2, \dots, c_k de $[a, b]$. Alors $g - f$ est nulle en dehors de ces points et c'est donc une fonction en escalier. Par suite $g - f$ est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale est nulle. On en déduit que $g = (g - f) + f$ est intégrable et que son intégrale est $\int_a^b f$. \square

3.6 Propriétés de l'intégrale de Riemann

3.6.1 Propriété de la moyenne

Proposition 3.23. *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a, b]$, et soit m et M des réels tels que pour tout x de $[a, b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$. Alors*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Si en outre f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(c)$.

Démonstration : Le premier point est clair puisque, pour toute subdivision X de $[a, b]$, on a :

$$m(b - a) \leq s(f, X) \leq S(f, X) \leq M(b - a).$$

Si f est continue sur le segment $[a, b]$ elle est bornée et atteint ses bornes en des points c_1 et c_2 de $[a, b]$. Le premier point montre alors que $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$ est un réel compris entre $f(c_1)$ et $f(c_2)$. f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un c dans $[a, b]$ tel que $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(c)$. \square

La quantité $(\int_a^b f(x) dx)/(b - a)$ est appelé **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$.

La propriété de la moyenne nous dit donc que si f est comprise entre m et M sur $[a, b]$, alors sa valeur moyenne est aussi comprise entre m et M .

3.6.2 Relation de Chasles

Proposition 3.24. *Soit $a < b < c$ trois nombres réels, et soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. Alors f est intégrable sur $[a, c]$ et*

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Démonstration : Soit $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ (en particulier $a_n = b$), et soit $Y = \{b_0, \dots, b_p\}$ une subdivision de $[b, c]$ ($b_0 = b$). Alors $Z = \{a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p\}$ est une subdivision de $[a, c]$, et on a

$$s(f, X) + s(f, Y) = s(f, Z) \quad S(f, X) + S(f, Y) = S(f, Z).$$

Donnons nous $\varepsilon > 0$. Il existe des subdivisions X et Y de $[a, b]$ et $[b, c]$ telles que

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, X) \leq S(f, X) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_b^c f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, Y) \leq S(f, Y) < \int_b^c f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

En prenant Z la subdivision de $[a, c]$ définie ci-dessus, on obtient

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \varepsilon < s(f, Z) \leq S(f, Z) < \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \varepsilon,$$

Ce qui montre que f est intégrable sur $[a, c]$, et que son intégrale sur $[a, c]$ est la somme de celles sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. \square

Exercice 3.1. Montrer que si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $a < c < b$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

On veut étendre la relation que l'on vient de montrer au cas où les nombres réels a , b et c sont en position quelconque. Pour ceci, on convient de poser :

Si $b < a$, alors $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$.	Si $a = b$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.
--	--------------------------------------

Avec cette convention, on obtient :

Corollaire 3.25 (Relation de Chasles). *Soit a , b et c trois nombres réels. Soit f une fonction intégrable sur un intervalle fermé contenant a , b et c . Alors*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Démonstration : Traitons seulement le cas $a < c < b$. La proposition précédente donne

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

et on retrouve bien la relation de Chasles avec la convention adoptée. \square

Exercice 3.2. À l'aide de cette relation, démontrer le théorème 3.19.

3.6.3 Intégrale et relation d'ordre

Proposition 3.26 (Positivité). *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a, b]$. Si f est positive ou nulle sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

En outre, si f est continue sur $[a, b]$, l'intégrale n'est nulle que si et seulement si f est identiquement nulle.

Démonstration : Le premier point résulte de la formule de la moyenne (en prenant $m = 0$). Supposons f positive ou nulle et non identiquement nulle sur $[a, b]$. Il existe donc $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$. Par continuité de f , $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ et on peut donc trouver un réel $\delta > 0$ tel que

la fonction f soit minorée par $\frac{f(c)}{2}$ sur $[c - \delta, c + \delta]$. La propriété de la moyenne montre alors que $\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx$ est minoré par $(c + \delta - (c - \delta)) \frac{f(c)}{2}$. Par ailleurs on peut minorer $\int_a^{c-\delta} f(x)dx$ et $\int_{c+\delta}^b f(x)dx$ par 0, puisque f est positive ou nulle. Donc, par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \geq (c + \delta - (c - \delta)) \frac{f(c)}{2} = \delta f(c) > 0. \quad \square$$

Attention : on ne peut pas enlever l'hypothèse « f continue » dans la proposition précédente. Par exemple la fonction f qui vaut 0 sur $[0, 1/2[\cup]1/2, 1]$ et telle que $f(1/2) = 1$ a une intégrale nulle, bien que f soit positive ou nulle et non identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Corollaire 3.27 (Croissance de l'intégrale). *Soit f et g deux fonctions réelles intégrables sur $[a, b]$. Si on a $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.*

Démonstration : Cela résulte de la proposition précédente (puisque $g - f \geq 0$) et de la linéarité de l'intégrale. \square

Proposition 3.28. *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a, b]$. Alors sa valeur absolue $|f|$ est aussi intégrable sur $[a, b]$, et on a*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Démonstration : Montrons d'abord que $|f|$ est intégrable. Soit X une subdivision de $[a, b]$. Plaçons nous sur un intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ du découpage donné par la subdivision. Soit m_i et M_i les bornes inférieure et supérieure de f sur cet intervalle, l_i et L_i celles de $|f|$. Trois cas sont à distinguer :

- Si $0 \leq m_i \leq M_i$, alors $l_i = m_i$ et $L_i = M_i$.
- Si $m_i \leq M_i \leq 0$, alors $l_i = -M_i$ et $L_i = -m_i$.
- Si $m_i < 0 < M_i$, alors $l_i \geq 0$ et $L_i = \max(-m_i, M_i)$.

Dans les trois cas, on a $L_i - l_i \leq M_i - m_i$. Comme ceci a lieu pour tout intervalle de la subdivision, on en déduit $S(|f|, X) - s(|f|, X) \leq S(f, X) - s(f, X)$. Cette inégalité et l'intégrabilité de f montrent que $|f|$ satisfait le critère d'intégrabilité.

L'inégalité de la proposition vient de l'inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$, et du corollaire ci-dessus. \square

Proposition 3.29 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit f et g deux fonctions réelles intégrables sur $[a, b]$. Alors :*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)$$

De plus, si f et g sont continues, on a égalité si et seulement si f est identiquement nulle ou s'il existe une constante λ de \mathbb{R} telle que $g = \lambda f$.

Démonstration : Posons $\alpha = \int_a^b f^2(x)dx$, $\beta = \int_a^b f(x)g(x)dx$ et $\gamma = \int_a^b g^2(x)dx$. Soit X un nombre réel. L'intégrale $\int_a^b (g - Xf)^2$ est positive ou nulle, puisque la fonction qu'on intègre est un carré qui est donc positif ou nul. Puisque $(g - Xf)^2 = g^2 - 2Xfg + X^2f^2$, la linéarité de l'intégrale conduit à $\int_a^b (g - Xf)^2 = \int_a^b g^2 - 2X \int_a^b fg + X^2 \int_a^b f^2$. On en déduit que pour tout réel X , $\alpha X^2 - 2\beta X + \gamma \geq 0$.

- Si $\alpha = \int_a^b f^2(x)dx \neq 0$, on a un trinôme du second degré qui est de signe constant donc de discriminant négatif (le trinôme aurait sinon deux racines distinctes et changerait donc de signe). Par suite $\Delta = 4\beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$ ce qui donne l'inégalité voulue.

- Si $\alpha = \int_a^b f^2(x)dx = 0$, vérifier l'inégalité annoncée revient alors à montrer que $\int_a^b fg = 0$.

Or, si tel n'était pas le cas, on aurait par exemple $\beta = \int_a^b fg < 0$ et en faisant tendre X vers $-\infty$ dans l'inégalité (vraie pour tout réel X) $-2\beta X + \gamma \geq 0$ on obtiendrait une contradiction.

Traitons à présent le cas d'égalité.

- Si f est la fonction nulle ou si $g = \lambda f$ pour une constante réelle λ , on vérifie directement l'égalité $\beta^2 = \alpha\gamma$.
- Si $\beta^2 = \alpha\gamma$ et si f n'est pas la fonction nulle, alors le polynôme du second degré précédent a un discriminant nul donc une racine réelle double x_0 . Par suite, $\int_a^b (g - x_0 f)^2(x)dx = 0$.

Puisque $(g - x_0 f)^2$ est une fonction continue (car f et g le sont) positive ou nulle sur $[a, b]$, on a nécessairement $g = x_0 f$ d'après la proposition 3.26.

□

Après cette exposition de la théorie, quelques mots d'histoire. Eudoxe (4ème siècle av. J.C.) et Archimède (3ème siècle av. J.C.) justifiaient rigoureusement des formules de volumes ou d'aires en utilisant une méthode d'approximation par valeurs supérieures et par valeurs inférieures (méthode d'exhaustion). Avec l'apparition du calcul infinitésimal à la fin du 17ème siècle, l'accent est mis sur la primitive (ou « intégrale indéfinie ») comme opération inverse de la dérivation. Leibniz introduit la notation $\int f(x)dx$; le \int est un S comme l'initiale de « summa », et derrière la notation on retrouve l'idée d'une somme d'aires de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur infinitésimale dx . Au 19ème siècle, Cauchy revient aux procédés d'approximation d'intégrales définies, pour lesquelles il utilise la notation avec les bornes $\int_a^b f(x)dx$. À ce moment, la question « quelles fonctions sont intégrables ? » se pose à propos des développements de fonctions en séries de Fourier (vous verrez cela dans la suite de vos études), problème qui a motivé les travaux sur les fondements de l'analyse. Vers 1850, Riemann donne un critère de convergence des « sommes de Riemann », caractérisant les fonctions intégrables « au sens de Riemann ». Les problèmes d'intégrabilité des fonctions continues ne furent définitivement réglés qu'après la démonstration du théorème de Heine (1870), dans un mémoire de Darboux en 1875.

La théorie de l'intégrale de Riemann n'est pas la seule possible. La grande théorie « concurrente » est celle de l'intégrale de Lebesgue. Cette dernière est plus commode pour certains problèmes, et plus de fonctions sont intégrables (bien entendu, elle donne exactement les mêmes intégrales pour les fonctions intégrables au sens de Riemann). Par exemple, la fonction définie sur $[0, 1]$ qui vaut 1 pour tous les rationnels et 0 pour les réels non rationnels n'est pas intégrable au sens de Riemann. Vous pouvez vérifier que pour n'importe quelle subdivision de $[0, 1]$, la somme de Darboux inférieure vaut 0 tandis que la somme de Darboux supérieure vaut 1. Par contre cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$, et son intégrale vaut 0.

3.7 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 3.30. Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I . Soit $a \in I$. Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Alors la fonction F est dérivable sur I , et sa dérivée F' est égale à f . Autrement dit, F est une **primitive** de f sur I .

En conséquence, toute fonction réelle continue sur un intervalle I a une primitive sur I .

Démonstration : Si x et $x + h$ sont dans I , on a, par la relation de Chasles,

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(x)dx$$

puis par la propriété de la moyenne $F(x+h) - F(x) = hf(u)$ avec u compris entre x et $x+h$. Pour $h \neq 0$ on a finalement $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(u)$, et quand h tend vers 0, u qui est coincé entre x et $x+h$ tend vers x . Comme f est continue sur I , $f(u)$ tend vers $f(x)$. Ceci établit le théorème. \square

Rappel : Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

Remarque. Si F est une primitive de f sur I , alors pour tous les réels a et b de I on a

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

On emploie souvent la notation $[F(x)]_a^b$ pour désigner $F(b) - F(a)$.

Exercice 3.3. Montrer que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_x^{x^2} \ln(t)dt$ est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et que sa dérivée est $\Phi' : x \mapsto (4x - 1)\ln x$.

3.8 Calcul d'intégrales

3.8.1 Utilisation des primitives

Cela consiste à utiliser le dernier résultat sous couvert de trouver une primitive de la fonction à intégrer. Le tableau des primitives usuelles peut ici être très utile...

3.8.2 Intégration par parties

Théorème 3.31 (Intégration par parties). Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I contenant les réels a et b . Alors

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Démonstration : f et g étant dérivables sur I , il en est de même de fg et on a (dérivation d'un produit) $(fg)' = f'g + fg'$. Toutes ces fonctions étant Riemann-intégrables (car continues) sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$), la linéarité de l'intégrale entraîne $\int_a^b fg' = \int_a^b (fg)' - \int_a^b f'g$. Une primitive de $(fg)'$ étant fg , le résultat annoncé en découle. \square

Corollaire 3.32 (Formule de Taylor avec reste intégral). Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I . Pour tous réels a et b dans I on a

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

Démonstration : Pour $n = 0$ et f de classe C^1 , la formule se résume à $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$ ce qui résulte de l'égalité $\int_a^b f'(t)dt = [f(t)]_a^b$.

Pour $n = 1$ et f de classe C^2 , on procède à une intégration par parties dans l'intégrale $\int_a^b f'(t) dt$. Les fonctions $u : t \mapsto t - b$ (noter ce judicieux choix de u comme primitive de la fonction constante égale à 1) et $v = f'$ étant de classe C^1 sur I , on a $\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$ soit $\int_a^b f'(t) dt = [(t - b)f'(t)]_a^b - \int_a^b (t - b)f''(t) dt = (b - a)f'(a) + \int_a^b (b - t)f''(t) dt$.

On raisonne en fait par récurrence sur n . Supposons $n \in \mathbb{N}^*$, et la formule établie pour $n - 1$. Le reste de la formule à l'ordre $n - 1$ peut de même s'intégrer par parties (car on suppose f de classe C^{n+1}) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1} dt &= \frac{1}{(n-1)!} \left[f^{(n)}(t) \frac{-(b-t)^n}{n} \right]_a^b - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{-(b-t)^n}{n} dt \\ &= (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule à l'ordre n . □

Conséquence. (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I telle que $f^{(n+1)}$ soit majorée en valeur absolue par un réel M sur I . Alors, pour tous a et b dans I on a :

$$\left| f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dots - (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration : Cela résulte de la majoration de la valeur absolue d'une intégrale par l'intégrale de la valeur absolue (prendre garde à l'ordre des bornes). □

3.8.3 Changement de variables

Théorème 3.33 (Changement de variables). *Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert J , et soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle ouvert I et à valeurs dans J . Si a et b sont dans I ,*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Démonstration : Soit F une primitive de f sur J . φ est dérivable sur I et à valeurs dans J , et F est dérivable sur J donc (dérivation d'une composée) $F \circ \varphi$ est dérivable sur I et on a $(F \circ \varphi)' = \varphi' \times f \circ \varphi$. Toutes ces fonctions étant Riemann-intégrables (car continues) sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$), cela entraîne $\int_a^b (F \circ \varphi)' = \int_a^b \varphi' \times f \circ \varphi$ soit $F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = \int_a^b \varphi' \times f \circ \varphi$ ce qui est le résultat annoncé puisque $F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$. □

3.9 Intégrales des fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles en x (quotients de deux fonctions polynômes) sont des fonctions dont on peut toujours calculer une primitive (en théorie du moins). L'outil fondamental est la décomposition en éléments simples, qui permet d'écrire une fonction rationnelle comme somme :

- d'une fonction polynôme (partie entière) dont on a facilement une primitive,
- d'éléments simples de première espèce du type $\frac{\lambda}{(x-a)^n}$, dont on connaît une primitive

puisque

$$\int \frac{\lambda}{(x-a)^n} dx = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1, \\ \lambda \ln|x-a| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

- d'éléments simples de deuxième espèce du type $\frac{\lambda x + \mu}{((x-a)^2 + b^2)^n}$ avec $b \neq 0$.

Pour les éléments simples de deuxième espèce, on écrit d'abord

$$\int \frac{\lambda x + \mu}{((x-a)^2 + b^2)^n} dx = \frac{\lambda}{2} \int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^n} dx + \frac{\lambda a + \mu}{b^{2n-1}} \int \frac{\frac{dx}{b}}{\left(\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1\right)^n}.$$

Pour la première primitive, on reconnaît la forme $\frac{u'}{u^n}$ et donc :

$$\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^n} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1, \\ \ln((x-a)^2 + b^2) & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

La deuxième primitive se ramène, par le changement de variable $t = (x-a)/b$, $dt = dx/b$, au calcul de $I_n(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. On a $I_1(t) = \arctan t$, et $I_n(t)$ se calcule par récurrence sur n en utilisant une intégration par parties.

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(1+t^2)^n} - \int \frac{-2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \right) dt = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left((2n-1)I_n + \frac{t}{(1+t^2)^n} \right).$$

Ainsi, en théorie, on sait calculer une primitive de n'importe quelle fraction rationnelle en x , en suivant le chemin ci-dessus. Mais ATTENTION : il faut éviter de se lancer sans réfléchir dans une décomposition en éléments simples. Avant, il vaut mieux voir s'il n'y a pas plus simple, par exemple grâce à un changement de variables.

Exemple. La calcul de $\int \frac{x dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3}$ risque d'être très pénible en décomposant en éléments simples. Par contre, en effectuant le changement de variable $u = x^2$, on a

$$\int \frac{x dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u-1)(u+1)^3},$$

Le théorème de décomposition en éléments simples assure alors l'existence de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^3} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{(u+1)^3} + \frac{c}{(u+1)^2} + \frac{d}{u+1}$$

En multipliant par $u-1$ et en évaluant en 1 on obtient $a = 1/8$. En multipliant par $(u+1)^3$ et en évaluant en -1 on obtient $b = -1/2$. En multipliant par u et en faisant tendre u vers $+\infty$ on obtient $d = -1/8$. En évaluant en 0 on trouve $c = -1/4$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(u-1)(u+1)^3} &= \frac{1}{8} \ln|u-1| + \frac{1}{4(u+1)^2} + \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{8} \ln|u+1| \\ &= \frac{u+2}{4(u+1)^2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right|, \end{aligned}$$

et

$$\int \frac{x dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3} = \frac{x^2+2}{8(x^2+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right|.$$

3.10 Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

3.10.1 Fonctions polynômiales en $\cos x$ et $\sin x$.

Le calcul de primitives de telles fonctions se ramène, par linéarité, à celui de primitives de la forme $\int \cos^n x \sin^m x \, dx$.

- Si n (respectivement m) est impair, on fait le changement de variable $u = \sin x$ (respectivement $u = \cos x$).

$$\text{On a alors } \int \cos^{2p+1} x \sin^m x \, dx = \int (1-u^2)^p u^m \, du.$$

- Si m et n sont pairs, on linéarise l'expression.

3.10.2 Fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$.

Ce sont les fonctions construites à partir de $\cos x$ et $\sin x$ et des constantes en utilisant les « quatre opérations » $+$, $-$, \times , \div . Autrement dit, ce sont les fractions rationnelles en deux variables $R(u, v)$ dans lesquelles on remplace u par $\cos x$ et v par $\sin x$. Pour calculer $\int R(\cos x, \sin x) \, dx$, il y a un changement de variable qui marche toujours : c'est $t = \tan(x/2)$ (pour $x \in]-\pi, \pi[$), soit $x = 2 \arctan t$. On a alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt,$$

et on est amené à calculer

$$\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} \, dt,$$

qui est une primitive d'une fraction rationnelle en t , pas très agréable en général. On a intérêt à rechercher si d'autres changements de variable plus économiques veulent bien marcher. Il y a un « truc » pour trouver ces changements de variables, connu sous le nom de **régles de Bioche**. Soit $f : x \mapsto R(\cos x, \sin x)$ la fonction à intégrer.

- Si l'élément $f(x) \, dx$ est invariant quand on remplace x par $-x$, on fait le changement de variable $u = \cos x$.
- Si l'élément $f(x) \, dx$ est invariant quand on remplace x par $\pi - x$, on fait le changement de variables $u = \sin x$.
- Si l'élément $f(x) \, dx$ est invariant quand on remplace x par $\pi + x$, on fait le changement de variables $u = \tan x$.

Exemple. Soit à calculer une primitive de $f(x) = (1 + \sin x) \tan x$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. C'est une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$. Comme $f(\pi - x)(\pi - x) = -f(x)(-dx) = f(x) \, dx$, on pose $u = \sin x$. On a alors $du = \cos x \, dx$, et on a à calculer

$$\int \frac{u(1+u)}{1-u^2} \, du = \int \left(\frac{1}{1-u} - 1 \right) \, du = -u - \ln|1-u|,$$

d'où $\int (1 + \sin x) \tan x \, dx = -\sin x - \ln(1 - \sin x)$. Par contre, avec $t = \tan(x/2)$, on aurait eu à calculer

$$\int \left(1 + \frac{2t}{1+t^2} \right) \frac{2t}{1-t^2} \frac{2 \, dt}{1+t^2} = \int \frac{4t(1+t)}{(1+t^2)^2(1-t)} \, dt.$$

Est-il besoin de comparer ?

3.10.3 Fractions rationnelles en e^x , $\cosh x$, $\sinh x$.

On pose $u = e^x$, ce qui fait $dx = du/u$, $\cosh x = \frac{1}{2}(u + 1/u)$ et $\sinh x = \frac{1}{2}(u - 1/u)$. On est alors ramené au calcul d'une primitive de fraction rationnelle en u .

3.10.4 Fractions rationnelles en x en $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+f}}$.

On veut calculer

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/m}\right) dx.$$

On pose $u = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+f}}$, d'où l'on tire $x = (-b + fu^m)/(a - cu^m)$, et dx est égal à une fraction rationnelle en u fois du . On se retrouve à intégrer une fraction rationnelle en u .

Exemple. Calcul de $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x}$ sur $[1, +\infty[$ ou sur $] -\infty, -1[$.

On pose $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ d'où l'on tire $x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ et $dx = \frac{4u}{(1-u^2)^2} du$. On est amené à calculer

$$\begin{aligned} \int u \frac{1-u^2}{1+u^2} \frac{4u}{(1-u^2)^2} du &= \int \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)} du = \int \frac{2 du}{1-u^2} - \int \frac{2 du}{1+u^2} \\ &= \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - 2 \arctan u, \end{aligned}$$

donc

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x} = \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \right| - 2 \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| - 2 \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

3.10.5 Fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

On fait un changement de variable $x = \lambda t + \mu$ pour se ramener à un radical d'une des formes

- $\sqrt{1+t^2}$, auquel cas on peut poser $t = \sinh u$,
- $\sqrt{t^2-1}$, auquel cas on peut poser $t = \cosh u$,
- $\sqrt{1-t^2}$, auquel cas on peut poser $t = \cos u$ ou $t = \sin u$.

(L'objectif est, dans chaque cas, de mettre l'expression sous le radical sous la forme d'un carré.) Dans les trois cas, on se ramène à des primitives déjà traitées. Voici un exemple, où le deuxième changement de variable est inutile.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

On pose $t = (x-1)/\sqrt{2}$, alors $dx = \sqrt{2} dt$. On se ramène à

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t,$$

et donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} \quad \text{pour } 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}.$$

3.11 Compléments

3.11.1 Intégrale de Riemann et fonction en escalier

Théorème 3.34 (Autre critère d'intégrabilité). *Une fonction f , bornée sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer deux fonctions en escalier φ et ψ vérifiant : $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi - \varphi)(x) dx < \varepsilon$.*

Démonstration : Supposons tout d'abord f Riemann-intégrable.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit alors une subdivision X de $[a, b]$ telle que $S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon$. On définit les fonctions en escalier sur $[a, b]$ φ et ψ égales respectivement à $\inf\{f(x), x \in [a_{i-1}, a_i[$ et $\sup\{f(x), x \in [a_{i-1}, a_i[$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\psi(b) = \varphi(b) = f(b)$. Par construction, on a bien $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b \varphi(t) dt = s(f, X)$ et $\int_a^b \psi(t) dt = S(f, X)$. Finalement $\int_a^b (\psi - \varphi)(t) dt = S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Supposons réciproquement qu'il existe deux fonctions en escalier φ et ψ vérifiant $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi - \varphi)(x) dx < \varepsilon$. Soit $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à φ et à ψ . Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout x de $[a_{i-1}, a_i[$, on a $\varphi(x) = \lambda_i \leq \inf\{f(x); x \in [a_{i-1}, a_i[\leq \sup\{f(x); x \in [a_{i-1}, a_i[\leq \psi(x) = \mu_i$ et par suite $S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon$. \square

3.11.2 Exemple de fonction bornée non Riemann-intégrable sur $[a, b]$

Définissons la fonction de Dirichlet sur l'intervalle $[a, b]$ par $D(x) = 1$ si x est rationnel et $D(x) = 0$ si x est irrationnel. Soit φ une fonction en escalier inférieure à D sur $[a, b]$, associée à une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Pour tout i , l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ contient un irrationnel (propriété de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}) x pour lequel $\varphi(x) = \lambda_i \leq D(x) = 0$ donc $\int_a^b \varphi(x) dx \leq 0$. De même, si ψ est une fonction en escalier supérieure à D sur $[a, b]$, associée à une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ alors pour tout i , l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ contient un rationnel x pour lequel $\psi(x) = \mu_i \geq D(x) = 1$ donc $\int_a^b \psi(x) dx \geq b - a$. Par suite, $\int_a^b (\psi - \varphi) \geq b - a$ et la fonction D n'est donc pas intégrable au sens de Riemann.

3.11.3 Exemple de fonction non continue par morceaux et Riemann-intégrable

C'est le cas de la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Soit en effet $\varepsilon > 0$. $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ est continue donc intégrable sur $[\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ et il existe donc des fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ sur $[\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ et $\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^1 (\psi(t) - \varphi(t)) dt < \frac{\varepsilon}{2}$. Considérons alors les fonctions en escalier φ_1 et ψ_1 définies par $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ si $x \in [\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ et $\varphi_1(x) = -1$ sinon, ainsi que $\psi_1(x) = \psi(x)$ si $x \in [\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ et $\psi_1(x) = 1$ sinon. Il est clair que l'on a $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$ sur $[0, 1]$ et d'autre part,

$$\int_0^1 (\psi_1(t) - \varphi_1(t)) dt = \int_0^{\frac{\varepsilon}{4}} (\psi_1(t) - \varphi_1(t)) dt + \int_{\frac{\varepsilon}{4}}^1 (\psi(t) - \varphi(t)) dt < 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Par suite f est bien intégrable.

Il est cependant clair que f n'est pas continue par morceaux (f n'a pas de limite à droite en 0).

Chapitre 4

Probabilités

4.1 Couples de variables aléatoires - Variables aléatoires indépendantes

4.1.1 Premiers rappels

En première année, nous avons étudié les probabilités sur un *univers fini* Ω associé à une expérience aléatoire. On a défini un *événement* A comme une partie de l'univers, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ (l'évènement A étant dit *réalisé* si le résultat de l'expérience appartient à A) et on a introduit le vocabulaire associé aux opérations sur les événements : pour deux événements A et B donnés,

- $\bar{A} = \Omega \setminus A$ (aussi noté A^c) est l'*événement contraire* de A
- $A \cap B$ est l'évènement A ET B • $A \cup B$ est l'évènement A OU B
- A et B sont dits *incompatibles* ou disjoints si $A \cap B = \emptyset$.
- \emptyset est appelé *événement impossible* et Ω *événement certain*.

On a ensuite associé à chaque événement A une valeur $\mathbb{P}(A)$ appelée probabilité de A (intuitivement, la probabilité d'un événement est la fréquence d'apparition de cet événement lorsqu'on réalise une infinité de fois, dans les mêmes conditions, l'expérience aléatoire). On a ainsi défini une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (axiome de totalité) et, pour deux événements A_1 et A_2 disjoints (i.e. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$), $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ a alors été appelé *espace probabilisé fini*.

Dans ce cadre, on a défini une *variable aléatoire réelle* X comme étant une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On a introduit les notations

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\}) \quad [X \in E] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in E\} = X^{-1}(E)$$

Remarque importante : On a toujours $\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x]$ (réunion disjointe).

La *loi* de la variable aléatoire X (appelée également *probabilité image*) est l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $E \mapsto \mathbb{P}([X \in E])$. \mathbb{P}_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Comme $[X \in E] = \bigcup_{x \in E} [X = x]$ (Exercice : démontrer cette égalité par double inclusion.) et que cette réunion est disjointe, $\mathbb{P}([X \in E]) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}([X = x])$ et donner la loi de X revient donc à donner $X(\Omega)$ et tous les $\mathbb{P}([X = x])$ pour $x \in X(\Omega)$.

4.1.2 Couples de variables aléatoires

Définition 4.1. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R} .

- On appelle **couple de variables aléatoires** (X, Y) l'application

$$\begin{aligned}(X, Y) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega))\end{aligned}$$

(X, Y) est donc une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

- On appelle **loi conjointe** des variables aléatoires X et Y la loi du couple (X, Y) . Cette loi est donnée par l'application

$$\begin{aligned}(X, Y)(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\longmapsto \mathbb{P}([(X, Y) = (x, y)])\end{aligned}$$

- Les lois des variables aléatoires X et Y sont appelées **lois marginales** du couple (X, Y) .

Remarques.

- On peut aussi prendre en définition de la loi conjointe des variables aléatoires X et Y l'application $X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$, $(x, y) \longmapsto \mathbb{P}([(X, Y) = (x, y)])$ étant entendu qu'un couple (x, y) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ n'est pas toujours une valeur prise par le couple (X, Y) . En effet, un couple (x, y) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est un couple de la forme $(X(\omega), Y(\omega'))$ où $(\omega, \omega') \in \Omega^2$ alors qu'un couple de $(X, Y)(\Omega)$ est un couple de la forme $(X(\omega), Y(\omega))$ où $\omega \in \Omega$. Quelque soit la définition adoptée, l'évènement $[(X, Y) = (x, y)]$ est l'évènement $[X = x] \cap [Y = y]$. Cet évènement est impossible si $(x, y) \notin (X, Y)(\Omega)$ et sa probabilité est donc nulle.
- En résumé, donner la loi conjointe des variables X et Y , c'est donner $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ainsi que tous les $P([X = x] \cap [Y = y])$, $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Lorsque cela sera possible, on présentera la loi de (X, Y) sous forme d'un tableau à double entrée.

Exemple. Une urne contient trois boules blanches, deux boules rouges et trois boules vertes indiscernables au toucher. On extrait au hasard et simultanément trois boules de l'urne et on en observe les couleurs. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches (respectivement rouges) parmi ces trois boules. Déterminons la loi du couple (X, Y) .

On introduit l'ensemble Ω des parties à trois éléments de l'ensemble des huit boules (de cardinal $\binom{8}{3} = 56$) que l'on munit de la probabilité uniforme (boules indiscernables au toucher).

La loi conjointe de X et Y est donnée par $X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$, $Y(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ et le tableau des $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell])$:

$k \setminus \ell$	0	1	2
0	$\frac{1}{56}$	$\frac{6}{56}$	$\frac{3}{56}$
1	$\frac{9}{56}$	$\frac{18}{56}$	$\frac{3}{56}$
2	$\frac{9}{56}$	$\frac{6}{56}$	0
3	$\frac{1}{56}$	0	0

D'une manière générale, puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, on peut poser $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ où I est un ensemble de la forme $\llbracket 1, p \rrbracket$, ($p \in \mathbb{N}^*$) et J est un ensemble de la forme $\llbracket 1, q \rrbracket$, ($q \in \mathbb{N}^*$). Pour $(i, j) \in I \times J$, on pose alors $p_{i,j} = \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

Proposition 4.2.

1) Les évènements $[X = x_i] \cap [Y = y_j]$ pour $(i, j) \in I \times J$ sont deux à deux incompatibles et leur

réunion est égale à Ω . En particulier, $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j} = 1$

$$2) \forall i \in I, \mathbb{P}([X = x_i]) = \sum_{j \in J} p_{i,j} \text{ et } \forall j \in J, \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{i,j}.$$

Démonstration :

• 1). Vérifions que $([X = x_i] \cap [Y = y_j])_{(i,j) \in I \times J}$ est un système complet d'évènements. Soit $((i, j), (k, l)) \in (I \times J)^2$ tel que $(i, j) \neq (k, l)$. On a ou bien $i \neq k$ et dans ce cas, $[X = x_i] \cap [X = x_k] = \emptyset$ puis $([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \cap ([X = x_k] \cap [Y = y_l]) = \emptyset$, ou bien $j \neq l$ et dans ce cas, $[Y = y_j] \cap [Y = y_l] = \emptyset$ puis $([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \cap ([X = x_k] \cap [Y = y_l]) = \emptyset$. Donc, les évènements $[X = x_i] \cap [Y = y_j], ((i, j), (k, l)) \in (I \times J)^2$, sont deux à deux disjoints. Soit $\omega \in \Omega$. Puisque $X(\omega) \in X(\Omega)$ et $Y(\omega) \in Y(\Omega)$, on peut considérer un $(i_0, j_0) \in I \times J$ tel que $X(\omega) = x_{i_0}$ et $Y(\omega) = y_{j_0}$ et donc tel que $\omega \in [X = x_{i_0}] \cap [Y = y_{j_0}]$. Ceci montre que tout ω appartient à $\bigcup_{(i,j) \in I \times J} [X = x_i] \cap [Y = y_j]$ puis (l'inclusion réciproque étant claire) que $\Omega = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} [X = x_i] \cap [Y = y_j]$. On a montré que $([X = x_i] \cap [Y = y_j])_{(i,j) \in I \times J}$ est un système complet d'évènements.

• 2). Soit $i \in I$. $[X = x_i] = [X = x_i] \cap \left(\bigcup_{j \in J} [Y = y_j] \right) = \bigcup_{j \in J} ([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ et ces évènements sont deux à deux disjoints. Donc, $\mathbb{P}([X = x_i]) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$. De même, pour tout $j \in J$, $\mathbb{P}([Y = y_j]) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{i \in I} p_{i,j}$. \square

Exemple. Dans l'exemple précédent, on peut alors compléter le tableau pour obtenir les lois marginales :

k \ \ell	0	1	2	$\mathbb{P}([X=k])$
0	$\frac{1}{56}$	$\frac{6}{56}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{10}{56}$
1	$\frac{9}{56}$	$\frac{18}{56}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{30}{56}$
2	$\frac{9}{56}$	$\frac{6}{56}$	0	$\frac{15}{56}$
3	$\frac{1}{56}$	0	0	$\frac{1}{56}$
$\mathbb{P}([Y = \ell])$	$\frac{20}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{6}{56}$	Somme = 1

4.1.3 Lois conditionnelles

Définition 4.3. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$. La **loi conditionnelle** de X sachant $[Y = y]$ est la loi de la variable aléatoire X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}_{[Y=y]})$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) = \frac{\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbb{P}([Y = y])}$$

On définit de même la **loi conditionnelle** de Y sachant $[X = x]$ pour un $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$.

La proposition suivante est immédiate. Sa démonstration est laissée en exercice.

Proposition 4.4. Pour tout y de $Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$,

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([Y = y]) \times \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]).$$

Si pour tout y de $Y(\Omega)$, $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$, alors

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y]) \times \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])$$

4.1.4 Généralisation à un n -uplet de variables aléatoires

On généralise facilement ce qui précède à n variables aléatoires X_1, \dots, X_n ($n \geq 2$).

Définition 4.5. Soit X_1, \dots, X_n ($n \geq 2$), des variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

- L'application $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ est appelée n -uplet de variables aléatoires sur l'espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et se note (X_1, \dots, X_n) . C'est une variable aléatoire sur l'espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .
- La **loi conjointe** des variables aléatoires X_1, \dots, X_n est la loi du n -uplet (X_1, \dots, X_n) .
- Les **lois marginales** du n -uplet (X_1, \dots, X_n) sont les lois des variables X_1, \dots, X_n .

Quand on dispose de la loi du n -uplet (X_1, \dots, X_n) , les lois marginales s'obtiennent de la façon suivante : pour $a_k \in X_k(\Omega)$ donné,

$$\mathbb{P}([X_k = a_k]) = \sum \mathbb{P}([X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}, X_k = a_k, X_{k+1} = x_{k+1}, \dots, X_n = x_n])$$

la somme portant sur tous les $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ de $X_1(\Omega) \times \dots \times X_{k-1}(\Omega) \times X_{k+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$.

4.1.5 Variables aléatoires indépendantes

Rappels

- n évènements A_1, \dots, A_n sont dits **mutuellement indépendants** si pour tout $k \leq n$, pour tout $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ distincts on a :

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Par exemple, A, B et C sont trois évènements mutuellement indépendants si on a à la fois $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ mais aussi $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

- Si des évènements sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fautive.

Par exemple, on jette deux dés classiques parfaitement équilibrés, l'un rouge l'autre bleu et on considère les trois évènements suivants : $A = \{\text{le dé rouge donne un chiffre impair}\}$
 $B = \{\text{le dé bleu donne un chiffre impair}\}$ $C = \{\text{la somme des deux dés est impaire}\}$.

A, B et C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Définition 4.6. Soit X et Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Les **variables aléatoires** X et Y sont dites **indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

Il revient au même de dire que pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les évènements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

Exemple.

- Un urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On en tire deux avec remise. Soit X et Y les variables aléatoires égales au premier et au second numéro tiré. On a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{n^2} = \mathbb{P}([X = i])\mathbb{P}([Y = j])$$

donc les variables X et Y sont indépendantes.

- On effectue la même expérience mais sans remise. On a alors $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$ mais $\mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{1}{n^2}$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

Remarque. Si X et Y sont indépendantes on a aussi

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = \mathbb{P}(X \leq x) \times \mathbb{P}([Y \leq y])$$

et, d'une manière plus générale,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega)) \quad \mathbb{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbb{P}([X \in A]) \times \mathbb{P}([Y \in B]).$$

Exercice 4.1. Démontrer ce résultat.

Proposition 4.7 (Fonctions de deux variables indépendantes). *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$ et pour toute fonction g définie sur $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

Démonstration :

Soit $(z, z') \in f(X)(\Omega) \times g(Y)(\Omega)$. $[(f(X), g(Y)) = (z, z')] = [f(X) = z] \cap [g(Y) = z']$.

Or, $[f(X) = z] = \{\omega \in \Omega, f \circ X(\omega) = z\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in f^{-1}(\{z\})\} = [X \in f^{-1}(\{z\})]$. De même $[g(Y) = z'] = [Y \in g^{-1}(\{z'\})]$ donc,

$[(f(X), g(Y)) = (z, z')] = [X \in f^{-1}(\{z\})] \cap [Y \in g^{-1}(\{z'\})]$. Par indépendance, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([(f(X), g(Y)) = (z, z')]) &= \mathbb{P}([X \in f^{-1}(\{z\})]) \cdot \mathbb{P}([Y \in g^{-1}(\{z'\})]) \\ &= \mathbb{P}([f(X) = z]) \cdot \mathbb{P}([g(Y) = z']) \end{aligned}$$

Donc les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. \square

Exemple. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ et la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ ($(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \in]0, 1[$), alors la variable aléatoire $X + Y$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Démonstration : On a $X(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ donc $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 0, m + n \rrbracket$. Soit alors $k \in \llbracket 0, m + n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} [X + Y = k] &= [X + Y = k] \cap \Omega \\ &= [X + Y = k] \cap \left(\bigcup_{i=0}^m [X = i] \right) \\ &= \bigcup_{i=0}^m [X + Y = k] \cap [X = i] = \bigcup_{i=0}^m [X = i] \cap [Y = k - i] \end{aligned}$$

Cette réunion étant disjointe, par axiome de probabilité,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X + Y = k]) &= \sum_{i=0}^m \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = k - i]) \text{ et donc, par indépendance de } X \text{ et } Y, \\ \mathbb{P}([X + Y = k]) &= \sum_{i=0}^m \mathbb{P}([X = i]) \cdot \mathbb{P}([Y = k - i]). \text{ En posant } \binom{n}{j} = 0 \text{ pour } j < 0 \text{ ou } j > n, \end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X + Y = k]) &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k+i} \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} p^k (1-p)^{m+n-k} = p^k (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} \end{aligned}$$

Or, le coefficient de X^k dans le développement de $(1 + X)^m(1 + X)^n$ est $\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$ et comme $(1 + X)^n(1 + X)^m = (1 + X)^{n+m}$, on a donc $\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{n+m}{k}$ (identité de Vandermonde). Finalement, $\mathbb{P}([X + Y = k]) = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{(n+m)-k}$ et donc $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n + m, p)$. \square

Définition 4.8. Soit X_1, \dots, X_n ($n \geq 2$), des variables aléatoires sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

- On dit que les variables X_1, \dots, X_n , sont **deux à deux indépendantes** si pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont indépendantes.
- On dit que les variables X_1, \dots, X_n , sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ on a

$$\mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = \mathbb{P}([X_1 = x_1]) \cdots \mathbb{P}([X_n = x_n])$$

- On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite de variables aléatoires indépendantes** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires X_0, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

Proposition 4.9. Soit X_1, \dots, X_n ($n \geq 2$), des variables aléatoires sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Les variables X_1, \dots, X_n , sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(E_1, \dots, E_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$,

$$\mathbb{P}([X_1 \in E_1] \cap \dots \cap [X_n \in E_n]) = \mathbb{P}([X_1 \in E_1]) \times \dots \times \mathbb{P}([X_n \in E_n])$$

Remarque. Soit X_1, \dots, X_n n variables aléatoires mutuellement indépendantes et soit p dans $\{2, \dots, n-1\}$. Alors toute variable aléatoire fonction uniquement des variables X_1, \dots, X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction uniquement des variables X_{p+1}, \dots, X_n . Par exemple, si X_1, X_2, X_3 et X_4 sont quatre variables aléatoires mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 + 2X_3^2$ et $X_2 - 3e^{X_4}$ sont indépendantes.

4.2 Probabilités dans le cadre discret

4.2.1 Espaces probabilisés

On a rappelé la notion de probabilité sur un **univers fini** Ω associé à une expérience aléatoire. La situation se complique un peu lorsque par exemple Ω est un intervalle de \mathbb{R} ou même \mathbb{R} tout entier. On peut en effet montrer (on l'admettra ici) qu'il est impossible de construire une probabilité sur l'ensemble tout entier des parties de \mathbb{R} .

On contourne la difficulté en restreignant l'ensemble des événements : on ne prend plus $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tout entier mais seulement une partie de cet ensemble. On veut toutefois continuer à faire le même type d'opérations sur les événements. Cela conduit à introduire la notion de tribu.

Définition 4.10. Étant donné un ensemble Ω , on appelle **tribu** de parties de Ω toute partie \mathcal{T} de $\mathcal{P}(\Omega)$:

- contenant \emptyset
- stable par passage au complémentaire
- stable par union dénombrable

Exemples.

- $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont des tribus de parties de Ω
- Si $A \subset \Omega$, $\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une tribu de parties de Ω

- L'intersection de deux tribus de parties de Ω est encore une tribu.

Remarque. Si \mathcal{T} est une tribu de parties de l'ensemble non vide Ω , on dit que (Ω, \mathcal{T}) est un *espace probabilisable*.

Définition 4.11. Soit (Ω, \mathcal{T}) un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes

- (1) $\forall A \in \mathcal{T} \quad \mathbb{P}(A) \geq 0$
- (2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- (3) pour toute suite A_1, A_2, \dots d'évènements incompatibles (i.e., pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$),

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad (\sigma\text{-additivité})$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Remarque. La définition ci-dessus contient implicitement le fait que pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles, la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge.

Proposition 4.12 (Probabilité dans le cadre discret). Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable discret (c'est à dire tel que l'univers Ω est fini ou dénombrable). Se donner une probabilité sur Ω revient à se donner une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\sum p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Démonstration: (Incomplète.) On effectue la démonstration dans le cas particulier où $\Omega = \mathbb{N}$ mais elle est adaptable sans difficulté aux autres cas.

- Supposons que \mathbb{P} soit une probabilité sur $\Omega = \mathbb{N}$.

Pour tout n de \mathbb{N} , posons $p_n = \mathbb{P}(\{n\})$. On définit bien ainsi une suite de réels positifs. Comme

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\}, \text{ la } \sigma\text{-additivité de } \mathbb{P} \text{ entraîne } 1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n.$$

- Réciproquement, si une telle suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée, on pose, pour tout A de $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in A} p_n$. On définit ainsi une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui clairement vérifie $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

On admet ici la σ -additivité de \mathbb{P} . Le résultat n'est pas difficile mais fait appel au théorème (non vu) de sommation par paquets pour les séries positives.

Finalement, \mathbb{P} est bien une probabilité sur Ω . □

Exercice 4.2. Déterminer la valeur du réel $a > 0$ pour laquelle la donnée, pour $n \in \mathbb{N}^*$, des réels $p_n = \frac{a}{n(n+1)(n+2)}$ permet de définir une probabilité sur \mathbb{N}^* .

4.2.2 Propriétés élémentaires des probabilités

Tous les résultats de première année sur les probabilités s'étendent de manière naturelle à ce cadre plus général. C'est en particulier le cas de la notion de probabilité conditionnelle (formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes) mais aussi de la notion d'indépendance pour les évènements.

Définition 4.13. Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements est dite *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements est dite *décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \supset A_{n+1}$.

Exemple. Si $\Omega = \mathbb{N}$, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $A_n = \{1, \dots, n\}$ est croissante et $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}^*$.

Théorème 4.14. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right)$

Démonstration : Si la suite est croissante, notons $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Les ensembles B_i sont disjoints et pour tout n

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n A_i = A_n \text{ et } \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i\right) \quad \text{donc, par } \sigma\text{-additivité} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(B_i) \quad (\text{par définition de la somme d'une série}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

Si la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, alors la suite $(\overline{A_n})_{n \geq 0}$ est croissante et on obtient alors le résultat facilement en prenant le complémentaire puisque le complémentaire de $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ est $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$. \square

Exemple. Un singe immortel tape tous les jours 100 000 caractères de façon aléatoire sur un clavier de 40 touches. On cherche la probabilité que ce singe tape, un jour donné, l'intégralité du roman *Le rouge et le noir* sans une seule faute de frappe, sachant que ce livre comporte 100 000 caractères (c'est une approximation grossière). Notons A_n l'évènement « Le singe n'a pas réussi à taper entièrement le livre avant le jour n ». La suite d'évènements (A_n) est décroissante puisque si le singe n'a pas réussi avant le jour $n + 1$, c'est qu'il n'avait pas réussi avant le jour n . Posons $p = \frac{1}{40^{100\,000}}$. p est la probabilité que notre singe tape son livre un jour donné. Alors, par indépendance, $\mathbb{P}(A_n) = (1 - p)^n$. Le théorème de la limite monotone donne alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ puisque $p > 0$ et donc $1 - p < 1$. Il y a donc une probabilité nulle que le singe n'arrive jamais à taper *Le rouge et le noir*. Autrement dit, le singe arrivera à taper ce livre avec probabilité de 1 : un tel évènement (de probabilité 1) est dit **presque sûr**.

4.2.3 Variables aléatoires discrètes

Définition 4.15. Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable au plus dénombrable. Une variable aléatoire (réelle) discrète sur Ω est une application X de Ω dans \mathbb{R} telle que, pour tout x de \mathbb{R} , $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$.

Remarque. Dans la pratique, dans ce cadre discret, on pourra encore choisir $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et donc se passer de la dernière condition de la définition.

Théorème et définition 4.16 (Loi de probabilité d'une v.a. discrète). Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé au plus dénombrable. Soit X une variable aléatoire discrète sur cet espace à valeurs dans \mathbb{R} . L'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1], E \mapsto \mathbb{P}([X \in E])$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$. On l'appelle la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X (ou encore **probabilité image** de la variable aléatoire X).

Démonstration : Il est clair que \mathbb{P}_X est une application de $\mathcal{P}(X(\Omega))$ dans $[0, 1]$. De plus, $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Soit enfin $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{P}(X(\Omega)))^{\mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux disjoints. Alors, $([X \in E_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements deux à deux disjoints (car X est une application). Donc, par σ -additivité de \mathbb{P} ,

$$\mathbb{P}_X \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n \right) = \mathbb{P} \left([X \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n] \right) = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} X^{-1}(E_n) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(E_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_X(E_n)$$

On a montré que \mathbb{P}_X est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$. \square

Remarque. La loi de probabilité de X est entièrement déterminée par les atomes de probabilité $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X \in \{x\}) = \mathbb{P}([X = x]) : \forall E \subset X(\Omega), \mathbb{P}_X(E) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}_X(\{x\})$.

Dans la pratique, donner la loi de probabilité d'une variable discrète X reviendra donc à donner $X(\Omega)$ et les $\mathbb{P}([X = x])$ pour tous les x de $X(\Omega)$.

Comme dans le cadre fini, on introduit alors les fonctions de variables aléatoires, les couples (respectivement n -uplets) de variables aléatoires et la notion de variables indépendantes. Les propriétés vues dans le cadre fini s'étendent de manière naturelle au cadre discret.

La notion d'espérance diffère pour sa part quelque peu...

Définition 4.17 (Espérance d'une variable aléatoire discrète). *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé au plus dénombrable. Soit X une variable aléatoire discrète sur cet espace à valeurs dans \mathbb{R} . Notons alors $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ l'image de Ω par X . On dit que la variable X admet une **espérance** si la série $\sum x_k \mathbb{P}([X = x_k])$ converge absolument.*

On définit alors son espérance par $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \mathbb{P}([X = x_k])$.

Remarque. Cette notion d'espérance garde toutes les propriétés de celle introduite dans le cadre fini : linéarité, croissance...

4.3 Lois discrètes classiques

On ne rappellera pas ici les lois finies classiques : la loi uniforme (équirépartie) sur un ensemble à n éléments, la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$, loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$...

• Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0, 1[$

On répète une épreuve de Bernoulli de paramètre p de manière indépendante et on s'arrête au premier succès. On note X le nombre de réalisations (indépendantes) nécessaires de l'épreuve de Bernoulli jusqu'à obtenir un succès. X est donc le rang du premier succès. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $[X = k] = E_1 \cap \dots \cap E_{k-1} \cap S_k$ où E_i (resp. S_i) est l'évènement « La $i^{\text{ème}}$ épreuve a donné un échec (resp. succès).

Par indépendance, $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}(E_1) \cdots \mathbb{P}(E_{k-1}) \mathbb{P}(S_k) = p(1-p)^{k-1}$.

Définition 4.18. *On dit qu'une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé dénombrable $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, suit la **loi géométrique** de paramètre p et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}([X = k]) = p(1-p)^{k-1}$.*

Proposition 4.19. *Si X est une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p alors X a une espérance et on a $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$.*

Démonstration : Notons tout d'abord que, d'après la règle de Riemann, la série $\sum k\mathbb{P}([X = k])$ converge puisque, par croissances comparées, $k^2(k\mathbb{P}([X = k])) = pk^3(1-p)^{k-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ (puisque $0 < 1-p < 1$). X admet donc une espérance.

Posons à présent $q = 1-p$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n kq^{k-1}$. Ce qui précède montre que la suite (u_n) est convergente. Notons ℓ sa limite. Soit $n \geq 2$.

On a alors $u_n = \sum_{k=1}^n (k-1+1)q^{k-1} = \sum_{k=1}^n (k-1)q^{k-1} + \sum_{k=1}^n q^{k-1}$. On en déduit (en posant $j = k-1$) $u_n = q \sum_{j=0}^{n-1} jq^{j-1} + \frac{1-q^n}{1-q}$ soit $u_n = qu_{n-1} + \frac{1-q^n}{1-q}$. Comme $|q| < 1$, on obtient

à la limite $\ell = q\ell + \frac{1}{1-q}$ et donc $\ell = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$. Finalement, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} pu_n = \frac{1}{p}$. \square

Définition 4.20. Une variable aléatoire X , à valeurs dans \mathbb{N} , est dite **sans mémoire** si elle vérifie, pour tout (m, n) dans \mathbb{N}^2 , l'identité : $\mathbb{P}_{[X > m]}([X > m+n]) = \mathbb{P}([X > n])$.

Proposition 4.21. Une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* est sans mémoire si et seulement si sa loi est géométrique.

Démonstration : • Soit X une variable aléatoire sans mémoire à valeurs dans \mathbb{N}^* . Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \mathbb{P}([X > n])$. On a alors :

$$u_{n+1} = \mathbb{P}([X > n+1]) = \mathbb{P}([X > n+1] \cap [X > n]) = \mathbb{P}_{[X > n]}([X > n+1])\mathbb{P}([X > n])$$

soit $u_{n+1} = \mathbb{P}([X > 1])\mathbb{P}([X > n]) = u_1 u_n$. En posant $q = u_1$, on constate que la suite (u_n) est géométrique de raison q .

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[X = n] = [X > n-1] \cap \overline{[X > n]}$ donc $\mathbb{P}([X = n]) = u_{n-1} - u_n = q^{n-1} - q^n$ soit finalement $\mathbb{P}([X = n]) = p \cdot q^{n-1}$ où $p = 1-q$. X suit la loi géométrique de paramètre p .

• Réciproquement, supposons que X suive la loi géométrique de paramètre p et soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

$$\mathbb{P}_{[X > m]}([X > m+n]) = \frac{\mathbb{P}([X > m+n] \cap [X > m])}{\mathbb{P}([X > m])} = \frac{\mathbb{P}([X > m+n])}{\mathbb{P}([X > m])}$$

Or, $[X > m+n] = \bigcup_{k=m+n+1}^{+\infty} [X = k]$ (car X est à valeurs entières) donc

$$\mathbb{P}([X > m+n]) = \sum_{k=m+n+1}^{+\infty} pq^{k-1} = pq^{m+n} \frac{1}{1-q} = q^{m+n}$$

De même, $\mathbb{P}([X > m]) = q^m$. On en déduit alors

$$\mathbb{P}_{[X > m]}([X > m+n]) = \frac{q^{m+n}}{q^m} = q^n = \mathbb{P}([X > n])$$

X est donc bien sans mémoire. \square

• **Loi de Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$**

Cette loi est souvent utilisée pour dénombrer des événements « rares », comme des pannes, des sinistres, des clients entrant dans une boutique pendant un intervalle de temps donné.

Définition 4.22. On dit qu'une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé dénombrable $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, suit la **loi de Poisson** de paramètre λ et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Proposition 4.23. *Si X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ alors X a une espérance et on a $\mathbb{E}[X] = \lambda$.*

Démonstration : On a déjà vu que, pour tout réel x , $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k])$. On a alors $u_n = \sum_{k=0}^n k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^n \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$. On en déduit (en posant $j = k - 1$) $u_n = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!}$. Il est alors clair que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (donc X a une espérance) et à la limite $\mathbb{E}(X) = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda$. \square

Théorème 4.24 (Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson). *Soit λ un réel strictement positif et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes telles que X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$. Alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . Autrement dit,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([X_n = k]) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Démonstration : On a, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P([X_n = k]) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} e^{(n-k)\ell n(1-\frac{\lambda}{n})} \end{aligned}$$

Or, d'une part $n(n-1) \cdots (n-k+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k$ et d'autre part $\ell n(1 - \lambda/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$ (car $\frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$). Donc on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([X_n = k]) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

\square

Remarques.

- Dans la pratique, on considère souvent que, lorsque $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$.
- On dit que la loi de Poisson est la loi des événements rares (elle approche le tirage de n boules avec remise dans une urne contenant des boules blanche en proportion égale à p qui est faible).

Lemme 4.25. Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente. Pour toute partition $(A_n)_{n \geq 0}$ de \mathbb{N} , la série $\sum \left(\sum_{k \in A_n} u_k \right)$ converge et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k \in A_n} u_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Démonstration : • Montrons la convergence et une inégalité.

Soit $n \in \mathbb{N}$. A_n est fini ou dénombrable. S'il est fini, on note c_n son cardinal et φ_n l'application strictement croissante de $\{1, \dots, c_n\}$ dans \mathbb{N} telle que $A_n = \{\varphi_n(k), k \in \llbracket 1, c_n \rrbracket\}$. S'il est dénombrable, on pose $c_n = +\infty$ et on note φ_n l'application strictement croissante de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N} telle que $A_n = \{\varphi_n(k), k \in \mathbb{N}^*\}$. Posons alors

$$A_{p,n} = \{\varphi_k(i), k \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ et } 0 \leq j \leq \min(n, c_p)\}$$

D'une part, les entiers $\varphi_k(i)$ étant tous distincts, on a $\sum_{j \in A_{p,n}} u_j \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. D'autre part,

$$\sum_{j \in A_{p,n}} u_j = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{\min(n, c_p)} u_{\varphi_k(i)} \text{ et donc } \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{\min(n, c_p)} u_{\varphi_k(i)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n. \text{ En faisant tendre } n \text{ vers}$$

l'infini, il vient alors $\sum_{n=1}^p \sum_{k \in A_n} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. En faisant tendre p vers l'infini, on a finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k \in A_n} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

• Montrons l'inégalité inverse. □

Soit alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints. L'événement $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ est une partie de l'ensemble dénombrable Ω et donc est aussi au plus dénombrable. Cet ensemble s'écrit donc sous la forme $\{\omega_k, k \in I\}$ où l'ensemble des indices I est soit vide, soit un ensemble du type $\llbracket 1, p \rrbracket$, $p \in \mathbb{N}^*$, soit \mathbb{N} . Pour chaque n , on note I_n l'ensemble des indices k de I tels que $\omega \in A_n$. Les ensembles I_n sont deux à deux disjoints et leur réunion est I . Puisque la famille $(p_\omega)_{\omega \in A}$ est sommable, le théorème de sommation par paquets permet

d'écrire $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in I_n} p_{\omega_k} \right) = \sum_{k \in I} p_{\omega_k} = \mathbb{P}(A)$. \mathbb{P} est donc bien une probabilité.

Notation. Deux variables aléatoires X et Y ont la même loi de probabilité si et seulement si $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $\forall a \in X(\Omega), \mathbb{P}([X = a]) = \mathbb{P}([Y = a])$. Quand deux variables aléatoires X et Y ont la même loi de probabilité, on écrit $X \sim Y$. Quand une variable aléatoire suit une loi de probabilité \mathcal{L} donnée, on écrit $X \sim \mathcal{L}$.

Vocabulaire. Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ au plus dénombrable. Soit x un réel. La partie $A = [X \leq x]$ de Ω est un événement car réunion au plus dénombrable d'événements du type $[X = a]$, $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut donc poser $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. F est la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé au plus dénombrable. Si X est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans un ensemble E et f est une application de E vers un ensemble F , on peut définir la composée $f \circ X$ que l'on note abusivement $f(X)$. L'ensemble des valeurs prises par $f(X)$ est $f(X(\Omega))$. C'est un sous-ensemble de F . Avec ces notations

Théorème 4.26. $f(X)$ est une variable aléatoire sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans F .

Démonstration : Par hypothèse $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et donc $f(X(\Omega))$ est au plus dénombrable. Soit $y \in F$. On a $(f(X))^{-1}(\{y\}) = X^{-1}(f^{-1}(\{y\}))$. $f^{-1}(\{y\})$ est une partie de E puis $f^{-1}(\{y\}) \cap X(\Omega)$ est une partie de E au plus dénombrable. Ainsi, $(f(X))^{-1}(\{y\})$ est une réunion au plus dénombrable d'éléments de \mathcal{F} et est donc un élément de \mathcal{F} . □

Ainsi, si X est une variable aléatoire réelle, on peut définir les variables aléatoires $X^2, |X|, e^X \dots$

On s'intéresse maintenant à la loi de probabilité de $f(X)$

Théorème 4.27. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé au plus dénombrable. Soient X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans un ensemble non vide E et f une application de E vers un ensemble non vide F . On pose $Y = f(X)$. La loi de probabilité \mathbb{P}_Y de Y est donnée par*

$$\forall y \in F, \mathbb{P}_Y(\{y\}) = \mathbb{P}([Y = y]) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}([X = x])$$

Démonstration: L'évènement $[Y = y]$ est la réunion disjointe des $[X = x]$, $x \in f^{-1}(\{y\})$. \square

4.4 Couples de variables aléatoires. n -uplets de variables aléatoires

4.4.1 Couples de variables aléatoires

Définition 4.28. *Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisable au plus dénombrable (Ω, \mathcal{F}) à valeurs dans des ensembles non vides E et E' respectivement. Le couple de variables aléatoires (X, Y) est l'application $(X, Y) : \Omega \longrightarrow E \times E', \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$.*

Théorème 4.29. *Le couple de variables aléatoires (X, Y) est une variable aléatoire sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) .*

Démonstration: $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables. Ensuite,

$$(X, Y)(\Omega) = \{(X(\omega), Y(\omega)), \omega \in \Omega\} \subset \{(X(\omega), Y(\omega')), (\omega, \omega') \in \Omega^2\} = X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

On sait que $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est une partie au plus dénombrable de $E \times E'$ et donc $(X, Y)(\Omega)$ est une partie au plus dénombrable de $E \times E'$.

Soit $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. L'ensemble $\{(X, Y) = (x, y)\}$ est l'ensemble $\{\omega \in \Omega / (X(\omega), Y(\omega)) = (x, y)\} = \omega \in \Omega / X(\omega) = x \cap \omega \in \Omega / Y(\omega) = y = X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\})$. Donc, $[(X, Y) = (x, y)]$ est bien un élément de \mathcal{F} (c'est-à-dire un évènement) en tant qu'intersection de deux éléments de \mathcal{F} . Ceci montre que (X, Y) est une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}) à valeurs dans $E \times E'$. \square

De manière générale, si X et Y sont deux variables réelles discrètes telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, $X + Y$ est une variable à valeurs dans \mathbb{N} dont la loi est donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{i+j=n} \mathbb{P}(X = i, Y = j)$. Si de plus, les variables X et Y sont indépendantes, on obtient la loi de

$X + Y$ à partir des lois de X et de Y : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X + Y = n]) = \sum_{i+j=n} \mathbb{P}([X = i])\mathbb{P}([Y = j])$.