UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu du 14 novembre 2019 - CORRIGÉ

Questions de cours (*5 points*)

1) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. On dit que f admet un ***développement limité à l'ordre*** n ***en*** 0 s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que

$$f(h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \epsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

2) Soit f et g deux fonctions réelles intégrables sur $[a, b]$. Alors :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$$

3) Si u et v sont de classe C^1 sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b v(t)\,u'(t)\,\mathrm{d}t$.
Démonstration : Sous ces hypothèses, uv est dérivable sur $[a, b]$ et on a $(uv)' = u'v - uv'$ soit $uv' = (uv)' - u'v$. Par hypothèse, u' et v' sont continues donc il en est de même de uv', de $u'v$ et de $(uv)'$. Ces fonctions sont donc intégrables sur $[a, b]$ et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (uv)' - \int_a^b v(t)\,u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le résultat en découle puisqu'une primitive de $(uv)'$ est uv.

4) Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$. On dit que ***l'intégrale*** de f sur $[a, b[$ ***converge*** si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers b.

Exercice n°1 (*2 points*)

On a $X = \dfrac{\pi}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\tan X \underset{X \to 0}{\sim} X$ donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \pi \dfrac{n^2}{2^n} = v_n$. Or $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{2} < 1$ donc (règle de d'Alembert pour les séries positives), $\sum v_n$ converge. Le théorème d'équivalence pour les séries positives permet alors d'affirmer que $\sum u_n$ converge.

Exercice n°2 (*5 points*)

1) $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées : c'est une série alternée et la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (qui n'est autre que la suite des sommes partielles de cette série) est donc convergente.

2) a) Puisque $\forall x \in [0, 1],\ 0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$ on en déduit (par croissance de l'intégrale)

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale, $I_{k-1}+I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{k-1}+x^k}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{k-1}\frac{1+x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et donc $I_{k-1}+I_k = \left[\dfrac{x^k}{k}\right]_0^1 = \dfrac{1}{k}$.

On en déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(I_{k-1}+I_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\Big((-1)^{k-1}I_{k-1} - (-1)^k I_k\Big)$ (car $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$) et donc $S_n = (-1)^0 I_0 - (-1)^n I_n = I_0 + (-1)^{n+1} I_n$ (somme téléscopique).

c) La question 1) permet alors de conclure que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ell n\, 2$.

3) f est de classe C^{n+1} sur $[0,1]$ et un calcul simple montre que $\forall t \in [0,1]$, $f^{(n+1)}(t) = (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.
En particulier, $\forall t\in[0,1]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant n!$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f sur cet intervalle donne alors :

$$\left|f(1) - f(0) - \frac{(1-0)^1}{1!}f'(0) - \cdots - \frac{(1-0)^n}{n!}f^{(n)}(0)\right| \leqslant n!\,\frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{soit}\quad \left|\ell n\, 2 - 0 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}.2! + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}(n-1)!\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

et donc $|\ell n\, 2 - S_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On retrouve bien $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell n\, 2$.

Exercice n°3 (*5 points*)

1) $X^3+1 = (X+1)(X^2+X+1)$. Comme X^2-X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ assure en effet l'existence de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$F = \frac{X}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$

- En multipliant F par $X+1$ puis en évaluant en -1 on obtient $\dfrac{-1}{(-1)^2+2} = a$ soit $a = -\frac{1}{3}$.
- En multipliant F par X puis en faisant tendre X vers $+\infty$ on obtient $0 = a+b$ et donc $b = \frac{1}{3}$.
- En évaluant en 0 on obtient $0 = a+c$ et donc $c = \frac{1}{3}$.

2) On écrit $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\right)$ soit : $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$. Le changement de variable $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ dans la deuxième intégrale donne alors

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ell n\left(x^2-x+1\right) + \sqrt{3}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{2}\ell n\left(x^2-x+1\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cte}$$

3) $g : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{\cos^3 t + \sin^3 t}$ est continue donc intégrable (au sens de Riemann) sur le segment $[0,\frac{\pi}{4}]$.
On constate que l'expression $g(t)\,\mathrm{d}t$ est invariante quand on remplace t par $\pi+t$. Les règles de Bioche conduisent alors à effectuer le changement de variable $u = \tan t$. On a alors $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

En divisant par $\cos^3 t$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} g = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t}{1+\tan^3 t}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int_0^1 \frac{u}{1+u^3}\,\mathrm{d}u$. La question 1) permet alors d'écrire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} g = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{-\,\mathrm{d}u}{u+1} + \int_0^1 \frac{u+1}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u\right)$. Compte tenu de la question 2), il vient donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} g = -\frac{1}{3}\left[\ell n\,(1+u)\right]_0^1 + \frac{1}{6}\left[\ell n\,(u^2-u+1)\right]_0^1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\ell n\,2 + \pi\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Exercice n°4 *(4,5 points)*

1) Soit $x>0$. $g : t \longmapsto \dfrac{\ell n\, t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc sur le segment $[\frac{1}{x}, x]$ (ou $[x, \frac{1}{x}]$). g est donc Riemann-intégrable sur ce segment et par suite $F(x)$ existe bien.

2) a) g étant continue sur $]0,+\infty[$, on peut considérer une primitive G de g sur $]0,+\infty[$. Pour tout réel $x>0$ on a alors $F(x) = [G(t)]_{\frac{1}{x}}^{x} = G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right)$. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ et G est dérivable sur $]0,+\infty[$ (par définition d'une primitive) donc $x \mapsto G\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Par suite F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a (théorème de dérivation d'une composée) $\forall x>0,\ F'(x) = G'(x) + \dfrac{1}{x^2}G'\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ell n\, x}{1+x^2} + \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\ell n\,\frac{1}{x}}{1+(\frac{1}{x})^2} = \dfrac{\ell n\, x}{1+x^2} + \dfrac{-\ell n\, x}{1+x^2} = 0.$
On en déduit que F est constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
En particulier, $\forall x>0,\ F(x) = F(1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$

b) Soit $x>0$. $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$. g étant continue sur $]0,+\infty[$, on peut effectuer le changement de variable $u=\varphi(t)$. $\mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$ ou encore $\mathrm{d}t = -\dfrac{du}{u^2}$.
$F(x) = \displaystyle\int_u^{\frac{1}{u}} \frac{\ell n\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_u^{\frac{1}{u}} \frac{\ell n\, u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$. Par suite, $F(x) = -F(x)$ et donc $F(x)=0$.