

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu à distance du 26 novembre 2020

Durée : 1 heure

Les deux exercices sont indépendants.

La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice n°1

1) Discuter, suivant la valeur de l'entier naturel n , la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3 + 1)^n}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^3 + 1)^n}$.

a) Justifier l'existence de $I_n(x)$.

b) Trouver les réels a , b et c tels que

$$\forall t \geq 0 \quad \frac{1}{t^3 + 1} = \frac{a}{t + 1} + \frac{bt + c}{t^2 - t + 1}$$

c) En déduire $I_1(x)$.

3) Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$. (*On pourra procéder à une intégration par parties.*)
En déduire $I_2(x)$.

Exercice n°2

Étudier la convergence de chacune des deux intégrales suivantes :

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^2}{t\sqrt{t}} dt \qquad 2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}} dt$$

Fin du contrôle.