UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu du 10 octobre 2019

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Questions de cours (*3 points*)

1) Énoncer la proposition assurant l'existence d'un développement limité pour $f \circ g$ (substitution).

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Quand dit-on que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes ? (Donner la définition.)

3) Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles positives telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Démontrer que si la série $\sum v_n$converge alors la série $\sum u_n$ converge également.

Exercice n°1 (*4 points*)

1) Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto e^x$ et de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$.

2) En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de :

a) $x \longmapsto \sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \dfrac{x}{2}$.

b) $x \longmapsto e^{3x} - e^{2x} - \sin(x)$.

3) En déduire finalement que $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \sin(x)}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x/2} = -4.$

Exercice n°2 (*4,5 points*)

On considère la fonction $f :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x}{\tan x}$.

1) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \tan x$.

2) Justifier que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2. Donner ce développement.

3) En déduire que f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ et que ce prolongement est dérivable en 0. Donner la valeur de $f'(0)$.

4) *(Question Bonus)* Justifier que f' a un développement limité à l'ordre 1 en 0. En déduire que f est deux fois dérivable en 0 et donner la valeur de $f''(0)$.

Tournez la page S.V.P.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ (*3,5 points*)

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est :

1) $u_n = \dfrac{3 - n.2^n}{n!}$ **2)** $u_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^2 + \sin^2 n}$

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ (*5 points*)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad w_n = \ell n \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

1) Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n$.

2) Montrer qu'aucune des deux séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ n'est absolument convergente.

3) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

4) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \ell n\,(1 + x)$.
En déduire la nature de la série $\sum w_n$ (on justifiera soigneusement le raisonnement).

`Fin du contrôle.`