4.5 Liaison entre notions de suite, de série et d'intégrale

Proposition 4.13. *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction positive décroissante. L'intégrale de* f *sur* $[a, +\infty[$ *converge si et seulement si la série* $\sum f(n)$ *converge.*

Démonstration : Pour clarifier les choses, supposons par exemple que $a = 1$.

- Par décroissance de f,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(n).$$

- Soit $N \geqslant 2$ un entier. Par sommation de ces inégalités, pour n allant de 1 à $N-1$, il vient

$$0 \leqslant f(2) + \cdots f(N) \leqslant \int_1^N f(t)\, dt \leqslant f(1) + \cdots + f(N-1).$$

- Le résultat en découle puisque f est positive :

- la série positive $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=1}^{N} f(n)\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est majorée et que

- l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \longmapsto \int_1^x f$ est majorée. $\square$

Remarque. Dans le cas de convergence, cette démonstration montre que l'on peut comparer la valeur de l'intégrale généralisée et la somme de la série.

En effet :
$$\int_{n+1}^{n+2} f \leq f(n+1) \leq \int_{n}^{n+1} f$$

En ajoutant de telles inégalités, on obtient
$$\int_{n+1}^{N+2} f \leq f(n+1) + \cdots + f(N+1) \leq \int_{n}^{N+1} f$$

On passe à la limite quand $N \to +\infty$.

$$\int_{n+1}^{\infty} f \leq R_n = \sum_{k \geq n+1} f(k) \leq \int_n^{\infty} f$$

Alors

$$S - S_n - \int_{n+1}^{\infty} f$$

$$0 \leq \overset{\shortparallel}{R_n} - \int_{n+1}^{\infty} f \leq \int_n^{n+1} f$$

Notons $S = \sum_{n \geq 1} f(n)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

- Ainsi $S_n + \int_{n+1}^{\infty} f$ est une valeur approchée de S à $\int_n^{n+1} f$ près.

<u>Exemple</u> $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ $\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Alors $S_n + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}$ près

Pour $n = 10$, on obtient $1,6406\ldots$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1,6449\ldots$$

et $\int_{10}^{11} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{10}^{11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$

Exercice 4.9. Déterminer pour quelles valeurs de α et β la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge.

• $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$, définie sur $]1,+\infty[$, est positive et décroissante au voisinage de $+\infty$.

En effet f est dérivable et

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)^\beta - \beta(\ln x)^{\beta-1}}{x^2(\ln x)^{2\beta}} = -(\ln x)^{\beta-1}\,\frac{\ln x - \beta}{x^2(\ln x)^{2\beta}}$$

$$\leq 0 \quad \text{si } x \geq e^\beta$$

Donc f est décroissante sur $[e^\beta, +\infty[\,\cap\,]1,+\infty[$

• Or $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$

• Donc $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

• <u>Remarque</u> Même si la fonction n'est pas décroissante, on peut s'inspirer de l'idée.

⇝ Montrons la divergence de $\int^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

• $\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=2}^{N} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ par la relation de Chasles

$\geq \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| \, dt$ car $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k\pi}$ sur $[(k-1)\pi, k\pi]$

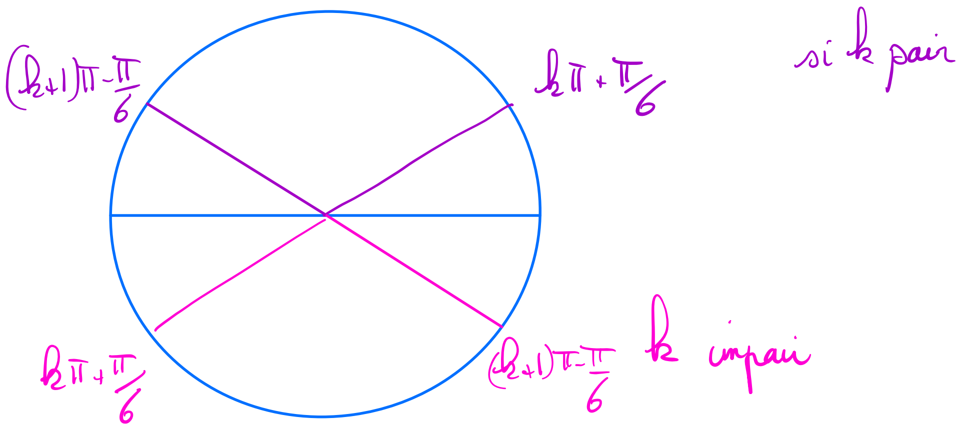
• Or $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| \, dt = \int_{0}^{\pi} \sin t \, dt = 2$

• Ainsi
$$\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} \xrightarrow[N \to \infty]{} +\infty$$

et donc $\int^{\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

• **Remarque** : montrons la divergence de $\sum \frac{|\sin n|}{n}$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$. L'intervalle $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\right]$ est de longueur $\pi - 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} > 1$ donc contient (au moins) un entier $n(k)$.



• Alors

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{k \geq 1} \frac{|\sin n(k)|}{n(k)}$$ (on prend moins de termes)

$$\geq \sum_{k \geq 1} \frac{1/2}{(k+1)\pi} = +\infty$$

car $n(k) \leq (k+1)\pi$

Proposition 4.14. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux. S'il existe une suite (x_n) d'éléments de $[a,b[$ tendant vers b et telle que :*

- *la suite de terme général $\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| \, \mathrm{d}t$ converge vers 0,*
- *la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) \, \mathrm{d}t$ converge,*

Alors l'intégrale $\int^b f(t) \, \mathrm{d}t$ converge (le résultat est encore valable si $b = +\infty$).

Démonstration : Notons

$$u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) \, \mathrm{d}t, \qquad S_n = u_1 + \cdots + u_n = \int_{x_1}^{x_{n+1}} f(t) \, \mathrm{d}t$$

et S la limite de (S_n).

- Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $|S_n - S| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

- D'autre part, pour $x \geqslant x_1$,

$$\left| \int_{x_1}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t - S \right| \leqslant \left| \int_{x_1}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t - S_n \right| + |S_n - S| = \left| \int_{x_{n+1}}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t \right| + |S_n - S| .$$

- Or par hypothèse, il existe un entier n_1 tel que $n \geqslant n_1$ entraîne

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| \, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Fixons alors $b > x \geqslant \sup\{x_1, x_{n_0}, x_{n_1}\}$ et posons $n = \sup\{k \in \mathbb{N}, \, x_k \leqslant x\}$.

- n est fini et $n \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_1$ donc

$$\left| \int_{x_1}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t - S \right| \leqslant \int_{x}^{x_{n+1}} |f(t)| \, \mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| \, \mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

On en déduit que $\int_{x_1}^{b} f$ converge et que de plus $\int_{x_1}^{b} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f$. $\square$

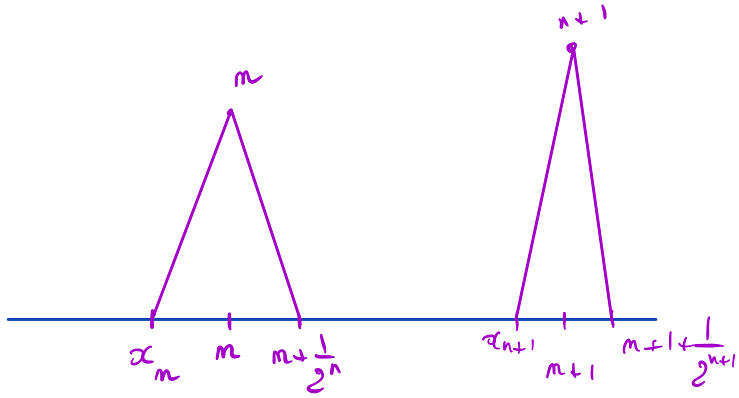
Exemple. Posons $x_n = n - \frac{1}{2^n}$.

Soit f la fonction continue, affine par morceaux définie sur chaque intervalle $[x_n, n + \frac{1}{2^n}]$ par

-$f(x) = \dfrac{n(x - x_n)}{n - x_n}$ si $x \leqslant n$ et

-$f(x) = \dfrac{n(x - 2n + x_n)}{x_n - n}$ si $x \geqslant n$,

et f nulle en dehors de ces intervalles.



On considère $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{n}{2^n}$.

La série $\sum_n u_n$ est convergente.

Le théorème précédent montre alors que $\displaystyle\int_{x_1}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et que

$$\int_{x_1}^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

Remarque. On a donc ici une fonction ***positive et non bornée*** dont l'intégrale converge.

L'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

- $x \overset{f}{\mapsto} \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0, donc f est localement intégrable sur $[0, +\infty[$.

- Pour montrer la convergence, on procède par intégration par partie :

$$\int_1^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^t - \int_1^t (-\cos x)\left(\frac{-1}{x^2}\right) dx$$

$$= \cos 1 - \frac{\cos t}{t} - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Or $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\cos t}{t} = 0$

et $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ donc $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge absolument.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

quelle est sa valeur ?

- Posons $$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, dt$$

  * I_n est bien définie car la fonction intégrée se prolonge par continuité sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

  * Effectuons le changement de variables $x = (2n+1)t$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)\,t}\,(2n+1)\, dt = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

- On va donc calculer la limite de I_n.

- Pour cela, on introduit
$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt$$

- S_n est bien définie car la fonction intégrée se prolonge par (Exercice) continuité sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

- On a $S_{n+1} = S_n$

$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

En effet $\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t = 2\cos\big((2n+2)t\big)\sin t$

et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2n+2)t \, dt = \left[\frac{\sin(2n+2)t}{2n+2}\right]_0^{\pi/2} = 0$

- Ainsi $\displaystyle J_n = J_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$.

- On va montrer

$$\lim_{n\to\infty} (I_n - J_n) = 0$$

- On en déduira donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$$

- $\displaystyle I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) \sin(2n+1)t \quad dt$

On souhaite effectuer une intégration par partie en dérivant

$\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$

Mais φ est-elle dérivable ? de classe C^1 ?

Étude de φ

- φ est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\varphi'(t) = \frac{t^2 \cos t - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t}$$

- Au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{t}{6} + o(t)$$

d'où $\varphi(t) = -\frac{t}{6} + o(t)$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.

Ainsi φ est dérivable de dérivée $-\frac{1}{6}$.

- De plus au voisinage de 0 :

$$\varphi'(t) = \frac{t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2}{t^4 + o(t^4)}$$

$$= \frac{t^2 - \frac{t^4}{2} - t^2 + \frac{2t^4}{6} + o(t^4)}{t^4 + o(t^4)} = \frac{-\frac{1}{6}t^4 + o(t^4)}{t^4 + o(t^4)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow[t \to 0]{} -\frac{1}{6} = \varphi'(0)$$

donc φ' est continue en 0.

Ainsi φ est de classe C^1 sur $[0 \; \frac{\pi}{2}]$. On peut effectuer une intégration par partie !

$$I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin(2n+1)t \, dt$$

$$= \left[-\varphi(t) \frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) \cos(2n+1)t \, dt}_{K_n}$$

$$= \frac{\varphi(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} K_n$$

- On $|K_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi'(t)| dt$ par positivité

donc $\frac{1}{2n+1} K_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

- De plus $\frac{\varphi(0)}{2n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Donc $I_n - J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Vers un calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

. Voici une idée d'un calcul.

. On ne peut pas encore tout justifier ...

- $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ en séparant les termes pairs et impairs

- $\displaystyle I_n = \int_1^0 x^n \ln x \, dx$ converge et par intégration par parties

$$I_n = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{(exercice)}$$

(si $n=0$ l'intégrale est généralisée ; si $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto x^n \ln x$ se prolonge par continuité en 0)

- Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^0 x^{2n} \ln x \, dx$$

$$\underset{\text{À JUSTIFIER !!!}}{=} \frac{4}{3} \int_1^0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \ln x \, dx$$

- Or $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \int_1^0 \frac{\ln x}{1-x^2} \, dx$$

- Cette intégrale est difficile à calculer. On peut montrer

$$\int_1^0 \frac{\ln x}{1-x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx$$

(les intégrales sont généralisées)

- Le changement de variables $u = \arctan x$, possible car la fonction arctan est de classe C^1, donne (exercice)

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \, du = \frac{\pi^2}{8}$$

- Finalement

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$