

Chapitre 4

Intégrales généralisées

4.1 Généralités

L'intégrale a été définie notamment pour des fonctions continues par morceaux sur un *segment*.

On souhaite étendre cette notion à des fonctions définies sur un *intervalle quelconque*.

Exemples :

$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ sur $]0, 1]$ ou sur $[1, +\infty[$, $x \mapsto \ln x$ sur $]0, 1]$, ou $x \mapsto \frac{A}{x(1-x)}$ sur $]0, 1[$.

On considère une fonction f de $[a, b[$ dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) où b désigne un réel ou $+\infty$.

Définition 4.1. f est dite **localement intégrable** sur $]a, b[$ si f est intégrable sur tout compact $[a, x]$ de $]a, b[$.

C'est en particulier le cas lorsque f est continue par morceaux sur $]a, b[$.

Dans toute la suite, on considérera f localement intégrable sur $]a, b[$.

Remarques.

- On pourrait procéder à la même étude avec f localement intégrable sur $]a, b]$.
- On pourrait aussi le faire avec $]a, b[$ *en divisant l'étude en deux* : d'abord sur $]a, c]$ puis sur $[c, b[$ avec $c \in]a, b[$.

4.1.1 Définition

Définition 4.2. Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$.

On dit que **l'intégrale** de f sur $[a, b[$ **converge** si la fonction

$$x \longmapsto \int_a^x f(t) dt$$

admet une limite finie quand x tend vers b (à gauche).

Si tel est le cas, on note indifféremment

$$\int_a^b f(t) dt, \quad \int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_{[a,b[} f$$

cette limite.

Dans le cas contraire on dit que **l'intégrale** $\int_a^b f(t) dt$ **diverge**.

Exemples.

1. $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue donc localement intégrable sur $]0, 1]$. Pour tout réel $x \in]0, 1]$ on a

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge et on a $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

2. L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{converge.}$$

En effet, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan t \right]_0^x = \arctan x$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

3. Par contre, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt \quad \text{diverge.}$$

En effet, $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. Mais

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \left[\ln(1+t) \right]_0^x = \ln(1+x)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty.$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}$ diverge.

4. L'intégrale

$$\int_0^1 \ln t dt \quad \text{converge.}$$

En effet, $t \mapsto \ln t$ est continue donc localement intégrable sur $]0, 1]$. Et

$$\int_x^1 \ln t dt = \left[t \ln t - t \right]_x^1 = x - x \ln x - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x - 1) = -1.$$

On pourra écrire :

$$\int_0^1 \ln t dt = \left[t \ln t - t \right]_0^1 = -1.$$

Exercice 4.1. Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge.

Remarque. Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, elle est localement intégrable sur $[a, b[$ et on a :

$$\forall x \in [a, b[, \quad \left| \int_a^x f - \int_a^b f \right| = \left| \int_b^x f \right| \leq M |b - x|$$

où M est un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$.

Donc $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$ existe et vaut $\int_a^b f$.

Autrement dit, l'intégrale de Riemann de f coïncide avec son intégrale généralisée.

Remarques.

- On s'autorise souvent à écrire $\int_a^b f(t) dt$ avant d'avoir prouvé l'existence de la limite. On parle alors de la *nature* de cette intégrale.

- Il y a en fait deux problèmes distincts :
 - l'existence de la limite et
 - sa détermination éventuelle.

Influence de la borne inférieure.

Soit α dans $[a, b[$.

La relation de Chasles donne

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^\alpha f(t) dt + \int_\alpha^x f(t) dt.$$

- f est intégrable sur le segment $[a, \alpha]$.
- Donc $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^b f(t) dt$ sont de même nature.

La borne inférieure n'a donc pas d'influence sur la nature de l'intégrale (on peut choisir a très près de b).

Remarque. On parle de la nature de $\int_a^b f(t) dt$. Cette nature est donc déterminée par les propriétés de f au voisinage de b .

4.1.2 Propriétés des intégrales généralisées.

Toutes ces propriétés se démontrent en utilisant les propriétés analogues des intégrales définies et en passant à la limite. En voici quelques exemples :

- **Linéarité** : Si les intégrales de f et g sur $[a, b[$ convergent, alors pour tous réels λ, μ l'intégrale de $\lambda f + \mu g$ sur $[a, b[$ converge et

$$\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

- **Positivité** : Si $f \geq 0$ sur $[a, b[$ et si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- **Comparaison** : Si $f \leq g$ sur $[a, b[$ et si les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
- **Relation de Chasles** : Si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\int_c^b f(t) dt$ converge pour tout $c \in [a, b[$ et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Exercice 4.2. Démontrer ces propriétés.

Remarque. Si $\int_a^b f(t) dt$ converge alors $\lim_{x \rightarrow b} \int_x^b f(t) dt = 0$.

Soit en effet $x \in [a, b[$ alors $\int_a^x f(t) dt$ converge. Or la relation de Chasles impose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$$

d'où le résultat en passant à la limite.

• **Intégration par parties** : Si u et v sont de classe C^1 sur $[a, b[$, le théorème d'intégration par parties dit que l'on a

$$\int_a^x u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x v(t) u'(t) dt.$$

Si les trois limites existent, on aura par passage à la limite :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^b v(t) u'(t) dt.$$

Exemple. Soit $\lambda > 0$. Que vaut l'espérance de la loi exponentielle $\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$?

- On effectue l'intégration par parties avec $f(t) = \lambda t$, $g'(t) = e^{-\lambda t}$.
- On a donc $f'(t) = \lambda$ et $g(t) = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}$.
- Les fonctions f et g sont bien de classe C^1 , et pour $x \in [0, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt &= \int_0^x f(t) g'(t) dt \\ &= [fg]_0^x - \int_0^x f'(t) g(t) dt \\ &= \left[\lambda t \cdot \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x - \int_0^x \lambda \cdot \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t} dt \\ &= -x e^{-\lambda x} + \int_0^x e^{-\lambda t} dt \\ &= -x e^{-\lambda x} + \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x \\ &= -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda x} - 1) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale converge et

$$\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Attention aux hypothèses : les trois limites doivent exister !

Exemple. Étudions $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$.

- La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ est localement intégrable sur $]0, 1[$.

- On pose $f(x) = \ln(1-x^2)$ et $g'(x) = \frac{1}{x^2}$, et on choisit $g(x) = \frac{-1}{x}$. Les fonctions f et g sont de classe C^1 , on a $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx &= \int_0^1 f(x) g'(x) dx \\ &= [fg]_0^1 - \int_0^1 f'(x) g(x) dx \\ &= \left[\frac{-\ln(1-x^2)}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx \end{aligned}$$

- Mais le terme de gauche n'admet pas de limite en 1, et l'intégrale de droite est divergente !

- Pourtant, on verra que l'intégrale de départ est bien convergente !

Exercice 4.3. Calculer quand même cette intégrale via une intégration par parties.

4.1.3 Cas des fonctions à valeurs dans \mathbb{C}

Définition 4.3. Si $f \in C_m([a, b[, \mathbb{C})$, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge si l'intégrale de sa partie réelle $Re(f)$ sur $[a, b[$ et l'intégrale de sa partie imaginaire $Im(f)$ sur $[a, b[$ convergent.

Sinon, on dit que l'intégrale diverge.

En cas de convergence, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b Re(f)(t) dt + i \int_a^b Im(f)(t) dt.$$

4.2 Cas des fonctions réelles positives

Dans tout le paragraphe, on supposera f localement intégrable sur $[a, b[$, à valeurs réelles, et **positive au voisinage de b** :

$$\exists \alpha \in [a, b[, \forall x \in [\alpha, b[, f(x) \geq 0.$$

4.2.1 Conséquence principale.

Proposition 4.4. *Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$ positive. Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction définie sur $[a, b[$ par*

$$x \longmapsto \int_a^x f(t) dt$$

est majorée.

Démonstration : On introduit $I_f(x) = \int_a^x f(t) dt$ pour $x \in [a, b[$.

- Comme f est positive, la fonction I_f est croissante, en effet

$$I_f(y) - I_f(x) = \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt \geq 0$$

pour $y \geq x$.

- Par conséquent, $I_f(x)$ admet une limite quand x tend vers b si et seulement si I_f est majorée. \square

Remarques.

- Si f est positive et si $\int_a^b f$ diverge alors $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = +\infty$.
- Analogie avec les séries à termes positifs.

Nous allons maintenant énoncer différentes *règles de comparaison*.

Théorème 4.5 (Théorème de comparaison). *Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs réelles, et positives sur $[a, b[$.*

- *Si $\forall x \in [a, b[$, $f(x) \geq g(x) \geq 0$ et si $\int^b g(t) dt$ diverge alors $\int^b f(t) dt$ diverge.*
- *Si $\forall x \in [a, b[$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ et si $\int^b g(t) dt$ converge alors $\int^b f(t) dt$ converge.*

Démonstration :

- Si $\int^b g(t) dt$ diverge alors I_g n'est pas majorée au voisinage de b .
- Or on a $I_f(x) \geq I_g(x)$ donc I_f n'est pas majorée non plus et $\int^b f(t) dt$ diverge.

De même pour la convergence. □

Exemple. Montrons que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \quad \text{converge,}$$

quel que soit le réel α .

Exemple. Montrons que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \quad \text{converge,}$$

quel que soit le réel α .

— Pour commencer, la fonction $t \mapsto t^\alpha e^{-t}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc y est localement intégrable.

— Puis nous écrivons : $t^\alpha e^{-t} = t^\alpha e^{-t/2} e^{-t/2}$.

— On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha e^{-t/2} = 0$, pour tout α , car l'exponentielle l'emporte sur les puissances de t .

— En particulier, il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t > A \quad t^\alpha e^{-t/2} \leq 1 .$$

— En multipliant les deux membres de l'inégalité par $e^{-t/2}$ on obtient :

$$\forall t > A \quad t^\alpha e^{-t} \leq e^{-t/2} .$$

— Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge. En effet :

$$\int_1^x e^{-t/2} dt = [-2e^{-t/2}]_1^x = 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2} = 2e^{-1/2} .$$

— Par le théorème de comparaison, puisque $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ converge aussi.

Théorème 4.6 (Théorème d'équivalence). *Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b[$, si f a un signe constant au voisinage de b et si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$ alors $\int^b g(t) dt$ et $\int^b f(t) dt$ sont de même nature.*

Démonstration : Supposons par exemple f positive au voisinage de b (sinon on considérerait $-f$).

- Par hypothèse

$$f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$$

avec $\lim_{x \rightarrow b} \varepsilon(x) = 0$ et donc en particulier $-\frac{1}{2} < \varepsilon(x) < \frac{1}{2}$ pour x suffisamment proche de b .

- Sur ce voisinage, g est aussi positive et on déduit donc : $\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$.
- Le théorème de comparaison permet alors de conclure. □

Exemple. Étude de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} dt.$$

Déjà la fonction intégrée est continue sur $[1, +\infty[$, donc y est localement intégrable.

On a

$$\frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^{-t},$$

Nous avons déjà montré que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ converge, d'où la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} e^{-t} dt.$$

Théorème 4.7 (Domination). Soit $g \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$ une fonction positive.

Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$ une fonction positive telle que $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$.

Si l'intégrale de g sur $[a, b[$ converge alors il en est de même de celle de f .

Démonstration : **Supposons tout d'abord $b \in \mathbb{R}$.**

- Comme $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$, il existe des réels $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall x \in]b - \delta, b[, \quad |f(x)| \leq Mg(x)$$

- On a alors

$$\forall x \in]b - \delta, b[, \quad 0 \leq f(x) \leq Mg(x).$$

- Comme $\int_a^b g(t) dt$ converge, $\int_{b-\delta}^b g(t) dt$ converge et donc (théorème de comparaison) l'intégrale de f sur $[b - \delta, b[$ est convergente.

Par suite, $\int_a^b f$ converge.

Si $b = +\infty$, on procède de même en remarquant qu'il existe $A > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall x > A, \quad 0 \leq f(x) \leq Mg(x).$$

□

4.2.2 Étude de la convergence lorsque $b = +\infty$.

Fonctions témoins : intégrales de Riemann

L'intégrale de Riemann $\int^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
- Si $\alpha = 1$, la fonction $F : t \mapsto \ln t$ est une primitive de f et
- si $\alpha \neq 1$, la fonction $F : t \mapsto \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}$ est une primitive de f .
- On remarque bien que F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Règle de la partie principale

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ telle que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{x^\alpha}$ où A est une constante réelle non nulle.

Alors $\int^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Règle de Riemann

Soit f continue par morceaux et positive sur $[a, +\infty[$.

- Si on peut trouver $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ soit majoré au voisinage de $+\infty$ alors l'intégrale $\int^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- Si on peut trouver $\alpha \leq 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ soit minoré par un nombre non nul au voisinage de $+\infty$ alors l'intégrale $\int^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

Exercice 4.4. Démontrer ces deux résultats.

Remarques.

- Les règles précédentes s'appliquent encore pour la borne $-\infty$. Pour la règle de Riemann, on étudiera $|x|^\alpha f(x)$.
- Si $\int^{+\infty} f(t) dt$ converge et si f a une limite finie en $+\infty$ alors cette limite est nulle.

En effet, si f admet une limite $\ell \neq 0$ en $+\infty$, on a a fortiori $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

Exemple. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2+x^2} dx$.

- $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x} \ln x}{2+x^2}$ est continue par morceaux (donc localement intégrable) sur $[0, +\infty[$.

- En effet, f a une limite finie en 0 puisque $\sqrt{x} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

- Pour tout $x > 0$,

$$x^{\frac{5}{4}} f(x) = \frac{1}{\frac{2}{x^2} + 1} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

(par croissance comparée des fonctions logarithmes et puissances).

- La règle de Riemann permet donc d'affirmer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2+x^2} dx$ converge.

Intégrales de Bertrand

Une *intégrale de Bertrand* est

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt$$

où $\beta \in \mathbb{R}$.

La primitive est explicite :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\beta+1} (\ln t)^{-\beta+1} \right]_2^x & \text{si } \beta \neq 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(\ln t) \right]_2^x & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

On en déduit la nature des intégrales de Bertrand.

Si $\beta > 1$ alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt$ converge.

Si $\beta \leq 1$ alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt$ diverge.

Exercice 4.5. Démontrer la convergence de

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2 + 3t} \ln \left(\cos \frac{1}{t} \right) \sin^2 \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt.$$

Exercice 4.6. Discuter selon $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ la nature de l'intégrale de Bertrand généralisée

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt.$$

4.2.3 Étude de la convergence lorsque b est fini

Fonctions témoins : intégrales de Riemann

L'intégrale de Riemann $\int_0 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Avec les notations précédentes, on remarque que F admet une limite finie en 0 si et seulement si $\alpha < 1$.

Ce même raisonnement montre que

L'intégrale de Riemann $\int^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Règle de la partie principale.

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ telle que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} \frac{A}{(b-x)^\alpha}$ où A est une constante réelle non nulle.

Alors $\int^b f(t) dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Règle de Riemann.

Soit f continue par morceaux et positive sur $[a, b[$.

- Si on peut trouver $\alpha < 1$ tel que $(b-x)^\alpha f(x)$ soit majoré alors l'intégrale $\int^b f(t) dt$ converge.
- Si on peut trouver $\alpha \geq 1$ tel que $(b-x)^\alpha f(x)$ soit minoré par un nombre non nul alors l'intégrale $\int^b f(t) dt$ est divergente.

Exercice 4.7. Nature de

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}.$$

4.3 Intégrale d'une fonction quelconque. Convergence absolue

On considère toujours un intervalle de la forme $I = [a, b[$ avec $a < b$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 4.8. Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$ (ou $f \in C_m([a, b[, \mathbb{C})$). On dit que $\int_a^b f(t) dt$ **converge absolument** si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge.

Par exemple,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

est absolument convergente.

En effet, pour tout t ,

$$\frac{|\sin t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente. D'où le résultat par le théorème de comparaison.

Théorème 4.9. Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$ (ou $f \in C_m([a, b[, \mathbb{C})$) dont l'intégrale sur $[a, b[$ converge absolument. Alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Démonstration : On va le montrer pour une fonction a priori à valeurs complexes.

- Comme $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ et $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$, par linéarité, il suffit de le montrer pour les fonctions à valeurs réelles.

- Pour f à valeurs réelles, on note $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$. Ce sont deux fonctions positives, $0 \leq f_+ \leq |f|$ et $0 \leq f_- \leq |f|$, dont l'intégrale converge par majoration.

- Et comme $f = f_+ - f_-$, on déduit (par linéarité) que l'intégrale de f converge sur $[a, b[$.

- Enfin, $\int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$ donc

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b f_+ \right| + \left| \int_a^b f_- \right| = \int_a^b f_+ + \int_a^b f_-$$

(intégrales de fonctions positives)

- soit finalement $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b (f_+ + f_-) = \int_a^b |f|$. □

Exemple. L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

est donc convergente.

Remarque. On dit parfois que f est *intégrable* sur l'intervalle I pour signifier que l'intégrale de f sur I *converge absolument*.

Exemple. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{2 \cos x}{3 + x\sqrt{x}} dx$.

• La fonction $f : x \mapsto \frac{2 \cos x}{3 + x\sqrt{x}}$ est continue (donc localement intégrable) sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$|f(x)| \leq \frac{2}{x\sqrt{x}}.$$

• Comme $\int^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge (intégrale de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$), le théorème de comparaison permet d'affirmer que $\int^{+\infty} f$ converge absolument.

L'intégrale proposée converge donc.

Exemple. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ est continue (donc localement intégrable) sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0

On a $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\int_0 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$) donc $\int_0 f$ converge.

Étude en $+\infty$

• Pour tout $x \geq 1$, $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Le théorème de comparaison ne permet pas ici de conclure, la puissance au dénominateur n'étant pas suffisante pour obtenir une intégrale de Riemann convergente.

L'idée est alors d'augmenter cette puissance par une intégration par parties.

Soit $A > 1$. Les fonctions $u : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $v : x \mapsto \sin x$ sont de classe C^1 sur $[1, A]$ donc (théorème d'intégration par parties)

$$\int_1^A \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right]_1^A + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{\sin A}{\sqrt{A}} - \sin 1 + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

• D'une part, $\frac{\sin A}{\sqrt{A}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$.

• D'autre part

$$\forall x > 1, \quad \left| \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge (intégrale de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$) donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ converge (absolument)

• et en particulier $\int_1^A \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ a une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.

• On en déduit donc que $\int_1^A f$ a une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$: l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ converge.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Exercice 4.8. Nature de

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin x dx.$$

Définition 4.10. Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **semi-convergente** sur $[a, b[$ quand elle converge sans être absolument convergente.

Exemple. $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ est semi convergente. (Voir Td.)

4.4 Intégration des relations de comparaison

Théorème 4.11. Soit $g \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$ positive et $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$ telles que $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$, alors deux cas se présentent :

- si $\int_a^b g(t)dt$ converge, on a $\int_x^b f(t)dt = O_{x \rightarrow b}\left(\int_x^b g(t)dt\right)$,
- si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, on a $\int_a^x f(t)dt = O_{x \rightarrow b}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

Le résultat est encore valable en remplaçant les O par des o : si $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$,

- si $\int_a^b g(t)dt$ converge, on a $\int_x^b f(t)dt = o_{x \rightarrow b}\left(\int_x^b g(t)dt\right)$,
- si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, on a $\int_a^x f(t)dt = o_{x \rightarrow b}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

Démonstration : Cas de la convergence.

Si $\int_a^b g(t)dt$ **converge et** $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$, **on a** $\int_x^b f(t)dt = O_{x \rightarrow b}\left(\int_x^b g(t)dt\right)$.

• Supposons b fini.

• En supposant $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$, il existe des réels $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que,

$$\forall x \in]b - \delta, b[, \quad |f(x)| \leq M g(x).$$

• Alors d'une part $\int_x^b f$ converge absolument et d'autre part pour $x \geq b - \delta$:

$$\left| \int_x^b f(t)dt \right| \leq \int_x^b |f(t)| dt \leq M \int_x^b g(t)dt.$$

• On a donc bien $\int_x^b f(t)dt = O_{x \rightarrow b}\left(\int_x^b g(t)dt\right)$

Si $\int_a^b g(t)dt$ **converge et si** $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$, **on a** $\int_x^b f(t)dt = o_{x \rightarrow b}\left(\int_x^b g(t)dt\right)$.

• Si on suppose, $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$, la démonstration est identique car pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que,

$$\forall x \in]b - \delta, b[, \quad |f(x)| \leq \varepsilon g(x).$$

□

Démonstration : Cas de la divergence. Traitons le cas b fini et $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$.

Si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, on a $\int_a^x f(t)dt = o_{x \rightarrow b}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

• Comme g est une fonction positive, on a alors $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g(t)dt = +\infty$.

• Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $\delta > 0$ tel que,

$$\forall x \in]b - \delta, b[, \quad |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}g(x).$$

• Par conséquent, pour tout $x \in]b - \delta, b[$,

$$\left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt = \int_a^{b-\delta} |f(t)| dt + \int_{b-\delta}^x |f(t)| dt \leq \int_a^{b-\delta} |f(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{b-\delta}^x g(t)dt$$

• Comme $\int_{b-\delta}^x g(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$ (g est positive),

$$\left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq \int_a^{b-\delta} |f(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g(t)dt = \int_a^x g(t)dt \left(\frac{\int_a^{b-\delta} |f(t)| dt}{\int_a^x g(t)dt} + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

• Comme $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g(t)dt = +\infty$, on a donc $\frac{\int_a^{b-\delta} |f(t)| dt}{\int_a^x g(t)dt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et on peut considérer un réel $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in [b - \beta, b[, \quad \frac{\int_a^{b-\delta} |f(t)| dt}{\int_a^x g(t)dt} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

• On introduit enfin $\alpha = \min(\delta, \beta)$. On a alors, pour $x \in [b - \alpha, b[$,

$$\left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq \varepsilon \int_a^x g(t)dt$$

ce qui signifie bien que $\int_a^x f(t)dt = o_{x \rightarrow b}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$. □

Théorème 4.12 (Intégration des équivalents). *Soient f et g continue par morceaux et positives sur $[a, b[$ (b fini ou non). On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$.*

- Si $\int_a^b f(t) dt$ converge alors $\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g(t) dt$
- Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge alors $\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g(t) dt$

Démonstration :

On a $f(x) = g(x)\varphi(x)$ avec $\varphi(x)$ tendant vers 1 quand x tend vers b , c'est à dire

$$f(x) - g(x) = g(x)(\varphi(x) - 1)$$

et donc $f(x) - g(x) = \underset{x \rightarrow b}{o}(g(x))$.

- Si $\int_a^b f(t) dt$ converge alors il en est de même de $\int_a^b g(t) dt$ et aussi de $\int_x^b g(t) dt$ et de $\int_x^b f(t) dt$.

La proposition précédente donne alors $\int_x^b (f - g) = \underset{x \rightarrow b}{o}\left(\int_x^b g\right)$ soit

$$\int_x^b f - \int_x^b g = \underset{x \rightarrow b}{o}\left(\int_x^b g\right)$$

ou encore $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \left(\int_x^b g\right)$.

- Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge on a de même

$$\int_a^x (f - g) = \underset{x \rightarrow b}{o}\left(\int_a^x g\right)$$

et donc $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \left(\int_a^x g\right)$

□

Exemples.

- Soit $g : t \mapsto \frac{e^{t^2}}{2t}$.

$$\text{On a } g'(t) = \frac{4t^2 e^{t^2} - 2e^{t^2}}{4t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{t^2}.$$

Comme $\int^{+\infty} e^{t^2} dt$ diverge, on en déduit $\int_1^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x g'(t) dt$ et donc

$$\int_1^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

- Soit $g : t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2t}$.

$$\text{On a } g'(t) = \frac{4t^2 e^{-t^2} + 2e^{-t^2}}{4t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t^2}.$$

Comme $\int^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge, on en déduit $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g'(t) dt$ et donc

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

4.5 Liaison entre notions de suite, de série et d'intégrale

Proposition 4.13. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive décroissante. L'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ converge si et seulement si la série $\sum f(n)$ converge.

Démonstration : Pour clarifier les choses, supposons par exemple que $a = 1$.

- Par décroissance de f ,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n).$$

- Soit $N \geq 2$ un entier. Par sommation de ces inégalités, pour n allant de 1 à $N-1$, il vient

$$0 \leq f(2) + \cdots + f(N) \leq \int_1^N f(t) dt \leq f(1) + \cdots + f(N-1).$$

- Le résultat en découle puisque f est positive :

- la série positive $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=1}^N f(n) \right)_{N \in \mathbb{N}}$ est majorée et que

- l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_1^x f$ est majorée. \square

Remarque. Dans le cas de convergence, cette démonstration montre que l'on peut comparer la valeur de l'intégrale généralisée et la somme de la série.

Exercice 4.9. Déterminer pour quelles valeurs de α et β la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge.

Proposition 4.14. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. S'il existe une suite (x_n) d'éléments de $[a, b[$ tendant vers b et telle que :

- la suite de terme général $\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt$ converge vers 0,
- la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ converge,

Alors l'intégrale $\int^b f(t) dt$ converge (le résultat est encore valable si $b = +\infty$).

Démonstration : Notons

$$u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt, \quad S_n = u_1 + \cdots + u_n = \int_{x_1}^{x_{n+1}} f(t) dt$$

et S la limite de (S_n) .

- Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ entraîne $|S_n - S| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

- D'autre part, pour $x \geq x_1$,

$$\left| \int_{x_1}^x f(t) dt - S \right| \leq \left| \int_{x_1}^x f(t) dt - S_n \right| + |S_n - S| = \left| \int_{x_{n+1}}^x f(t) dt \right| + |S_n - S|.$$

- Or par hypothèse, il existe un entier n_1 tel que $n \geq n_1$ entraîne

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Fixons alors $b > x \geq \sup\{x_1, x_{n_0}, x_{n_1}\}$ et posons $n = \sup\{k \in \mathbb{N}, x_k \leq x\}$.

- n est fini et $n \geq n_i$ donc

$$\left| \int_{x_1}^x f(t) dt - S \right| \leq \int_x^{x_{n+1}} |f(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

On en déduit que $\int_{x_1}^b f$ converge et que de plus $\int_{x_1}^b f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f$. □

Exemple. Posons $x_n = n - \frac{1}{2^n}$.

Soit f la fonction continue, affine par morceaux définie sur chaque intervalle $[x_n, n + \frac{1}{2^n}]$ par

$$-f(x) = \frac{n(x - x_n)}{n - x_n} \text{ si } x \leq n \text{ et}$$
$$-f(x) = \frac{n(x - 2n + x_n)}{x_n - n} \text{ si } x \geq n,$$

et f nulle en dehors de ces intervalles.

On considère $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt = \frac{n}{2^n}$.

La série (u_n) est convergente puisque $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt = \frac{n}{2^n}$.

Le théorème précédent montre alors que $\int_{x_1}^{+\infty} f(t) dt$ converge et que

$$\int_{x_1}^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

Remarque. On a donc ici une fonction *positive et non bornée* dont l'intégrale converge.