Chapitre 3

Intégrale de Riemann

Le but de ce chapitre est de :
• ***définir l'intégrale*** de certaines fonctions sur une segment (disons au moins les fonctions continues),
• vérifier les ***propriétés attendues*** d'une intégrale (linéarité, relation de Chasles, propriété de la moyenne, positivité, intégration par parties, etc...).

On va construire l'intégrale ***au sens de Riemann*** ; il existe d'autres constructions (par exemple au sens de Lebesgue, cf. L3).

Une question importante sera de déterminer pour quel type de fonctions l'intégrale construite a un sens.

3.1 Continuité uniforme

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc pour x dans $]0, +\infty[$ et $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x' > 0, \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |1/x - 1/x'| < \varepsilon.$$

On prend $\varepsilon = 1$:

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x' > 0, \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |1/x - 1/x'| < 1.$$

Pour $x' = x + \delta/2$, on obtient alors

$$1 > \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \delta/2} \right| = \frac{\delta}{(2x + \delta)x}.$$

Mais quand x tend vers 0, le terme de droite tend vers $+\infty$!

Où est l'erreur ?

Définition 3.1. *Soit f une fonction réelle définie sur la partie D de $\mathbb{R}$. On dit que f est* **uniformément continue sur** *D quand pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tous x et x' dans D, si $|x - x'| < \delta$, alors $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*
Ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \forall x' \in D, |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Remarques.

1. Ici δ ne dépend que de ε. Comparez l'ordre des quantificateurs avec la définition de la continuité sur D.

2. ***La notion de continuité uniforme n'a pas de sens en un point : c'est une notion globale*** et non pas locale.

3. Le raisonnement faux du début montre tout de même que la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

4. Bien évidemment, une fonction uniformément continue sur D est aussi continue sur D.

Théorème 3.2 (Heine)**.** *Une fonction réelle continue sur un segment* $[a, b]$ *est uniformément continue sur ce segment.*

Démonstration : Soit f continue sur $[a, b]$. On suppose que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$:

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in [a, b],\ \exists x' \in [a, b],\ |x - x'| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon$$

On fixe un $\varepsilon > 0$ qui vérifie cette formule.

• Pour tout entier naturel n, en posant $\delta = 1/2^n$, on peut trouver u_n et v_n dans $[a, b]$ tels que $|u_n - v_n| \leqslant 1/2^n$ et que $|f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \varepsilon$.

• La suite (u_n) est bornée, donc d'après le ***théorème de Bolzano-Weierstrass*** on peut en extraire une suite $\left(s_n = u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.
Sa limite $\ell = \lim s_n$ est dans $[a, b]$ (qui est fermé).

• La suite $\left(t_n = v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a aussi ℓ pour limite car

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |s_n - t_n| = |u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}| \leqslant 1/2^{\varphi(n)} \leqslant 1/2^n \quad \text{ puisque } \varphi(n) \geqslant n$$

Grâce à la ***caractérisation séquentielle de la continuité*** de f en $\ell \in [a, b]$, on peut passer à la limite dans l'inégalité large $|f(s_n) - f(t_n)| \geqslant \varepsilon$, ce qui nous donne

$$|f(\ell) - f(\ell)| \geqslant \varepsilon > 0$$

qui est l'absurdité recherchée. □

Un intérêt de la continuité uniforme : approcher des fonctions continues sur un segment par des fonctions « en escalier ».

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, et fixons $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\text{pour tous } x \text{ et } x' \text{ de } [a, b], \quad \text{si } |x - x'| < \delta \text{ alors } |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

• Choisissons un entier naturel N tel que $(b - a)/N < \delta$.

• Divisons $[a, b]$ en N segments égaux $I_1, \cdots, I_N$.

• Pour chaque segment I_k on pose $m_k = \inf(f(I_k))$ et $M_k = \sup(f(I_k))$.

• On a $M_k - m_k < \varepsilon$ car ces bornes sont atteintes sur I_k et que la longueur de I_k est plus petite que δ.

Remarques. • On a donc deux « escaliers » qui encadrent la fonction f sur $[a, b]$.

• Supposons $f \geqslant 0$, les aires de ces deux escaliers encadrent l'aire sous le graphe de f à moins de $(b - a)\varepsilon$ près, ce qui peut être rendu aussi petit que l'on veut par le choix de ε.

Exercice. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ?

1. $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0,1]$.

2. $x \mapsto \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

3. $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

3.2 Continuité par morceaux

On se donne un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Définition 3.3. *On appelle* **subdivision** *de l'intervalle* $[a, b]$ *toute famille finie de réels* $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ *avec* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$.

On appelle **pas** *de la subdivision* X *le réel positif* $p(X) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}}(a_i - a_{i-1})$.

Enfin, on dit que la subdivision Y *est* **plus fine** *que la subdivision* X *quand* X *est un sous-ensemble de* Y.

Remarques.

- Une subdivision $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ permet de découper l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ pour $i = 1, \ldots, n$.

- Si ces n intervalles ont la même longueur, la subdivision est dite **régulière** et on a alors
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ a_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

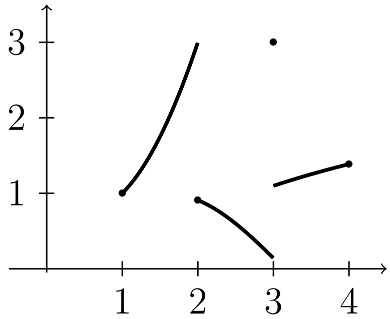
- Si X et Y sont deux subdivisions de $[a, b]$, alors la subdivision $X \cup Y$ est plus fine à la fois que X et que Y.

Définition 3.4. *On dit qu'une fonction f à valeurs réelles est* **continue par morceaux** *sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ ait un prolongement par continuité $g_i : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Exemples.

- La fonction

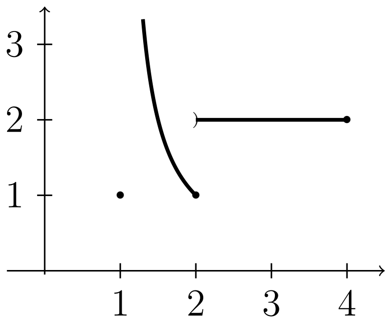
$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [1, 2[\\ \sin x & \text{si } x \in [2, 3[\\ 3 & \text{si } x = 3 \\ \ell n\, x & \text{si } x \in]3, 4] \end{cases}$$



est continue par morceaux sur $[1, 4]$.

- Par contre, la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \in]1,2] \\ 2 & \text{si } x \in]2,4] \end{cases}$$



n'est pas continue par morceaux sur $[2,4]$. Elle n'est en effet pas prolongeable par continuité sur $[1,2]$.

Définition 3.5. *Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction f à valeurs réelles est* **continue par morceaux** *sur I si, pour tout $[a,b] \subset I$, f est continue par morceaux sur $[a,b]$.*
On note $C_m(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I.

Remarque. Une fonction continue sur l'intervalle I est bien sûr continue par morceaux sur I.

3.3 Construction de l'intégrale sur un segment

3.3.1 Sommes de Darboux

On se donne un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle définie et bornée sur $[a, b]$.

Soit $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. On pose, pour $i = 1, \dots, n$

$$m_i = \inf\{f(x),\ x \in [a_{i-1}, a_i]\} \qquad M_i = \sup\{f(x),\ x \in [a_{i-1}, a_i]\}.$$

Remarque. Ces bornes inférieures et supérieures existent bien parce qu'on a supposé f bornée sur $[a, b]$, et donc a fortiori sur chaque $[a_{i-1}, a_i]$.

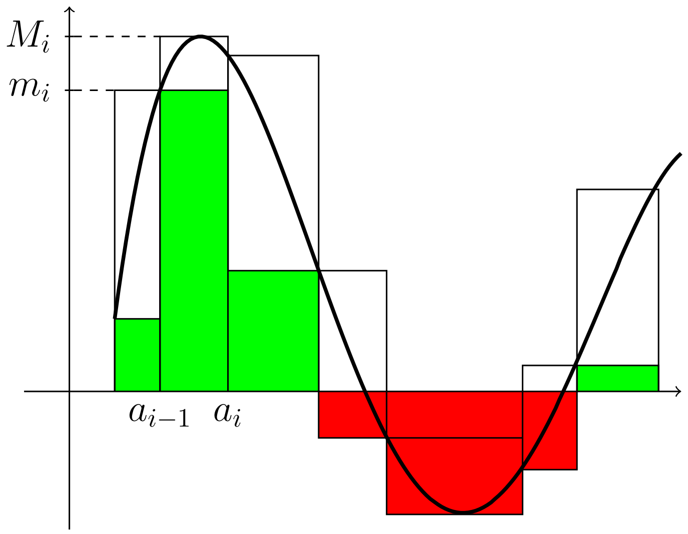
Définition 3.6. *On appelle* **somme de Darboux inférieure** *pour la fonction f et la subdivision X la somme*

$$s(f, X) = \sum_{i=1}^{n} m_i(a_i - a_{i-1}).$$

On appelle **somme de Darboux supérieure** *pour la fonction f et la subdivision X la somme*

$$S(f, X) = \sum_{i=1}^{n} M_i(a_i - a_{i-1}).$$

Idée : encadrer l'aire « sous le graphe de f » par deux sommes d'aires de rectangles :
- une « par en-dessous » (somme de Darboux inférieure)
- et l'autre « par au-dessus » (somme de Darboux supérieure).



La ***somme de Darboux inférieure*** est la somme des aires des rectangles
- comptés positivement pour ceux coloriés en vert
- et négativement pour ceux coloriés en rouge.

Exemples.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$.

   - On subdivise $[0,1]$ en $X = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.

   On a ainsi des intervalles $[a_{i-1}, a_i] = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ pour $i \geqslant 1$.

   - On en déduit $m_i = (\frac{i-1}{n})^2$ et $M_i = (\frac{i}{n})^2$.

   - Ainsi la somme de Darboux inférieure associée à f et X est

   $$s(f,X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1} j^2$$

   On rappelle que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d'où

   $$s(f,X) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

   - De même ***(exercice !)***

   $$S(f,X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon.

   - Pour toute subdivision X, on aura $m_i = 0$ et $M_i = 1$.

   - Ainsi $s(f,X) = 0$ et $S(f,X) = 1$.

Exercice. Calculer les sommes de Darboux associées à la fonction *exp* sur $[0,1]$, associées à la subdivision $X = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.

Proposition 3.7.
1) Si la subdivision Y est plus fine que la subdivision X, alors :

$$s(f, X) \leqslant s(f, Y) \quad \text{et} \quad S(f, X) \geqslant S(f, Y).$$

2) Pour toutes subdivisions X et Y, on a $\quad s(f, X) \leqslant S(f, Y).$

Démonstration : 1)
• Il suffit de considérer ce qui se passe quand on ajoute un point à la subdivision X, par exemple quand on intercale c avec $a_{i-1} < c < a_i$. Posons

$$\ell_1 = \inf\{f(x),\ x \in [a_{i-1}, c]\} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \inf\{f(x),\ x \in [c, a_i]\}.$$

• On a bien évidemment $m_i \leqslant \ell_1$ et $m_i \leqslant \ell_2$. Donc

$$m_i(a_i - a_{i-1}) \leqslant \ell_1(c - a_{i-1}) + \ell_2(a_i - c).$$

• Les autres termes des deux sommes étant deux à deux identiques, on a

$$s(f, X) \leqslant s(f, X \cup \{c\}).$$

On vérifie de manière analogue que $S(f, X) \geqslant S(f, X \cup \{c\})$.

2) D'après la première partie, on a

$$s(f, X) \leqslant s(f, X \cup Y) \quad \text{et} \quad S(f, X \cup Y) \leqslant S(f, Y).$$

Or il est clair que $s(f, X \cup Y) \leqslant S(f, X \cup Y)$, donc

$$s(f, X) \leqslant S(f, Y).$$

□

3.3.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

On suppose toujours la fonction réelle f bornée sur $[a,b]$.

Proposition 3.8. *On pose*

$$\begin{aligned} s(f) &= \sup\{s(f,X),\ X \textit{ subdivision de } [a,b]\}, \\ S(f) &= \inf\{S(f,X),\ X \textit{ subdivision de } [a,b]\}. \end{aligned}$$

Ces bornes inférieures et supérieures sont bien définies, et on a $s(f) \leqslant S(f)$.

Démonstration :

• Si X et Y sont des subdivisions de $[a,b]$, on a d'après la proposition précédente :

$$S(f,Y) \geqslant s(f,X).$$

• L'ensemble (non vide) des $s(f,X)$, où X est une subdivision de $[a,b]$, est majoré par $S(f,Y)$.

• Il a donc une borne supérieure $s(f)$ qui est inférieure ou égale à $S(f,Y)$.

• Ainsi l'ensemble (non vide) des $S(f,Y)$ est minoré par $s(f)$, et il a donc une borne inférieure $S(f)$, qui vérifie $s(f) \leqslant S(f)$. $\square$

Exemple. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$.

- On subdivise $[0,1]$ en $X_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.

- On a
$$s(f) \geqslant \lim_{n\to\infty} s(f, X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$
et
$$S(f) \leqslant \lim_{n\to\infty} S(f, X_n) = \frac{1}{3}.$$

- Ainsi
$$\frac{1}{3} \leqslant s(f) \leqslant S(f) \leqslant \frac{1}{3}$$

et on a même
$$s(f) = S(f) = \frac{1}{3}.$$

Définition 3.9. *La fonction f est dite* **intégrable au sens de Riemann** *sur l'intervalle $[a,b]$ quand $s(f) = S(f)$. Son* **intégrale** *sur $[a,b]$ est alors cette valeur commune $s(f) = S(f)$, et on la note*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque.

• Le x est une ***variable muette***, on peut le remplacer par n'importe quel autre nom, comme $\int_a^b f(u)du$.

• On utilisera aussi les notations $\int_a^b f$ et $\int_{[a,b]} f$.

Exemple.

La fonction constante égale à λ sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b \lambda\,dt = \lambda(b-a).$$

En effet, pour toute subdivision X de $[a,b]$, on a

$$s(f,X) = \lambda(b-a) = S(f,X).$$

Exemple. La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ est intégrable, et

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}.$$

Exercice. Montrer que la fonction *exp* est intégrable sur $[0,1]$. Calculer la valeur de son intégrale.

Exercice. ***Montrer que la fonction*** exp ***est intégrable sur*** $[0,1]$***. Calculer la valeur de son intégrale.***

Pour la subdivision régulière X_n on a :

$$s(exp, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{(i-1)/n}}{n} = \frac{e-1}{n(e^{1/n}-1)}$$

tend vers $e-1$ lorsque $n \to \infty$, et

$$S(exp, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{i/n}}{n} = e^{1/n} s(exp, X_n)$$

tend vers $e-1$ lorsque $n \to \infty$.

Ainsi

$$e-1 \leqslant s(exp) \leqslant S(exp) \leqslant e-1$$

et exp est intégrable sur $[0,1]$ avec

$$\int_0^1 e^x dx = e-1.$$

Idée de la définition des fonctions intégrables : l'encadrement entre les sommes de Darboux inférieures et les sommes de Darboux supérieures peut être rendu ***aussi précis que l'on veut***, déterminant un réel unique.

Il est commode d'utiliser le critère d'intégrabilité suivant :

Proposition 3.10 (Critère de Riemann-intégrabilité)**.**
Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a, b]$. La fonction f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe une subdivision X de $[a, b]$ telle que $S(f, X) - s(f, X) < \epsilon$.

Démonstration : ***Supposons f intégrable***, et donnons nous $\epsilon > 0$.

- D'après la définition de borne supérieure, il existe une subdivision Y de $[a, b]$ telle que $s(f, Y) > \int_a^b f(x)\, dx - \frac{\varepsilon}{2}$.

- De même, il existe une subdivision Z telle que $S(f, Z) < \int_a^b f(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2}$.

En posant $X = Y \cup Z$, on obtient

$$S(f, X) - s(f, X) \leqslant S(f, Z) - s(f, Y) < \epsilon.$$

Réciproquement,

Réciproquement, supposons le critère vérifié :

- pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver une subdivision X telle que

$$S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon.$$

- Or on a toujours

$$s(f, X) \leqslant s(f) \leqslant S(f) \leqslant S(f, X),$$

et donc

$$S(f) - s(f) < \varepsilon.$$

- Comme ceci doit avoir lieu pour tout $\varepsilon > 0$, c'est que $s(f) = S(f)$ et donc que f est intégrable sur $[a, b]$. □

Exemple. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$.

- On a

$$S(f, X_n) - s(f, X_n) = \frac{1}{6n^2}\big((n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1)\big) = \frac{1}{n}$$

- Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, dès que $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, on a

$$S(f, X_n) - s(f, X_n) < \epsilon.$$

- On retrouve donc que f est intégrable sur $[0, 1]$.

Proposition 3.11 (Caractérisation de l'intégrale de Riemann).
Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a,b]$.

• *La fonction f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si la différence des sommes de Darboux $S(f,X) - s(f,X)$ tend vers 0 quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a,b]$ tend vers 0.*

• *Le nombre $\int_a^b f(t)\,dt$ est alors la limite des sommes de Darboux supérieures $S(f,X)$ (ou inférieures $s(f,X)$) quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a,b]$ tend vers 0.*

Démonstration : La condition est ***suffisante*** d'après la proposition précédente.

• En effet, pour $\varepsilon > 0$ fixé, l'hypothèse assure l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$p(X) < \delta \Longrightarrow S(f,X) - s(f,X) < \varepsilon.$$

• Le choix d'une subdivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n} < \delta$ assure alors que $S(f,X) - s(f,X) < \varepsilon$.

• f est donc intégrable sur $[a,b]$.

Étudions la réciproque.

On suppose donc f intégrable.

• f étant bornée :

$$\forall x \in [a,b],\ m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Notons alors $A = M - m$.

• Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition précédente, il existe une subdivision $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ telle que $S(f,X) - s(f,X) < \frac{\varepsilon}{2}$.

• Soit Y une subdivision dont le pas est strictement inférieur à $\delta = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}(a_i - a_{i-1})$.

• Chaque intervalle de Y contenant au plus l'un des a_i :
- il y a au plus $n+1$ intervalles de Y qui contiennent un élément de X,
- et chacun des autres intervalles de Y est inclus dans un intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ de X.

• On a donc

$$S(f,Y) - s(f,Y) \leqslant S(f,X) - s(f,X) + (n+1)p(Y)A.$$

• Par suite, si

$$p(Y) < \inf(\delta, \frac{\varepsilon}{2A(n+1)})$$

alors

$$S(f,Y) - s(f,Y) \leqslant \varepsilon$$

d'où le premier résultat :

la fonction f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si la différence des sommes de Darboux $S(f,X) - s(f,X)$ tend vers 0 quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a,b]$ tend vers 0.

Vérifions enfin que le nombre $\int_a^b f(t)\,dt$ ***est alors la limite des sommes de Darboux inférieures*** $s(f,X)$ ***quand le pas*** $p(X)$ ***de la subdivision*** X ***de*** $[a,b]$ ***tend vers*** 0***.***

- On sait que pour toute subdivision X :

$$s(f,X) \leqslant s(f) = \int_a^b f(t)\,dt = S(f) \leqslant S(f,X)$$

- On soustrait $s(f,X)$ pour obtenir :

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,dt - s(f,X) \leqslant S(f,X) - s(f,X)$$

- Or

$$\lim_{p(X)\to 0} S(f,X) - s(f,X) = 0.$$

- Donc par encadrement

$$\lim_{p(X)\to 0} s(f,X) = \int_a^b f.$$

$\square$

3.3.3 Sommes de Riemann

Définition 3.12. *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction et $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle* **somme de Riemann** *de f relativement à X toute somme de la forme $R(f,X) = \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)(a_i - a_{i-1})$ avec, pour tout i de $\{1, \cdots, n\}$, $\theta_i \in [a_{i-1}, a_i]$.*

Proposition 3.13. *Soit f une fonction réelle intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. Alors toute somme de Riemann $R(f,X)$ tend vers $\int_a^b f(t)\,dt$ quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a,b]$ tend vers 0.*

Démonstration : Conséquence de l'inégalité :

$$s(f,X) \leqslant R(f,X) \leqslant S(f,X).$$

□

Exemple. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Notons que f est continue.

- Une somme de Riemann pour la subdivision X_n est

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i/n}{\sqrt{4-(i/n)^2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\sqrt{4n^2-i^2}}.$$

- En ***anticipant un peu sur la suite du cours***, f est intégrable car continue, et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\sqrt{4n^2-i^2}} = \int_0^1 f(x)dx.$$

- En ***anticipant encore plus***, on a aussi

$$\int_0^1 f(x)dx = [-\sqrt{4-x^2}]_0^1 = 2-\sqrt{3}.$$

- En conclusion

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\sqrt{4n^2-i^2}} = 2-\sqrt{3}.$$

Remarque. On choisira souvent une subdivision de $[a, b]$ en intervalles de même longueur $X_n = \{a_0, \ldots, a_n\}$ avec $a_i = a + i(b-a)/n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Lorsque f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, on a alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

En particulier, si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \tfrac{b-a}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(a + i\tfrac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)\, dx}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple. On veut calculer $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$

- Si on pose $f(x)=\sqrt{x}$, on peut réécrire le terme général de la suite comme

$$\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(1)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(0+i\frac{1-0}{n}\right)$$

- on reconnait une somme de Riemann pour f sur $[0,1]$.

- En ***anticipant sur le cours***, la fonction f est intégrable sur $[0,1]$, et la limite vaut

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3.3.4 Intégration des fonctions à valeurs complexes

Définition 3.14. *Une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite intégrable sur $[a, b]$ si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont intégrables sur $[a, b]$ et on pose*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(t)\big)\,dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\big(f(t)\big)\,dt$$

De même, une fonction à valeurs complexes est dite continue si ses parties réelle et imaginaire sont continues.

L'intégrale des fonctions à valeurs complexes héritera de nombreuses propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs réelles (linéarité, relation de Chasles, passage au module ...).

Exemple.

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \cos t dt + i \int_0^{2\pi} \sin t dt$$

En ***anticipant*** encore, on obtient

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t) dt = 0.$$

3.4 Classes de fonctions intégrables au sens de Riemann

Proposition 3.15 (Fonctions continues)**.** *Toute fonction continue sur le segment* $[a, b]$ *est intégrable au sens de Riemann sur* $[a, b]$*.*

Démonstration : • Par continuité, f est bornée, et uniformément continue sur $[a, b]$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a).$$

• Fixons un entier $n > (b - a)/\eta$ et posons $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$.

• La subdivision régulière $X_n = \{a_0, \cdots, a_n\}$ est telle que l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ a pour longueur $(b - a)/n < \eta$.

• Sur chaque segment $[a_{i-1}, a_i]$, la fonction f atteint sa borne inférieure m_i et sa borne supérieure M_i : on a $m_i = f(x_i)$ et $M_i = f(y_i)$.

• Comme x_i et y_i appartiennent tous les deux à l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ de longueur $(b - a)/n < \eta$, on doit avoir $M_i - m_i < \varepsilon/(b - a)$.

• Donc

$$S(f, X_n) - s(f, X_n) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \frac{b - a}{n} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

et le critère d'intégrabilité est vérifié. $\square$

Exemples.

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est intégrable sur $[0, 1]$.
2. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ aussi.

Proposition 3.16 (Fonctions monotones)**.** *Toute fonction monotone sur le segment $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Démonstration : On va traiter le cas de f croissante (et non constante).

- Tout d'abord, f est bornée sur $[a,b]$ puisque

$$\forall x \in [a,b], \quad f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b).$$

- On utilise la subdivision régulière X_n de la démonstration précédente. Puisque f est croissante, la borne supérieure de f sur $[a_{i-1}, a_i]$ est $f(a_i)$.

- De même la borne inférieure de f sur $[a_{i-1}, a_i]$ est $f(a_{i-1})$.

- On a donc

$$s(f, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a_{i-1}), \qquad S(f, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a_i).$$

Ceci donne

$$S(f, X_n) - s(f, X_n) = \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{n}.$$

- On se donne $\varepsilon > 0$. En choisissant l'entier n tel que

$$n > (f(b) - f(a))(b-a)/\varepsilon,$$

on obtient $S(f, X_n) - s(f, X_n) < \varepsilon$ et le critère d'intégrabilité est vérifié. $\square$

Définition 3.17. *On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est* **en escalier** *s'il existe une subdivision $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout i de $\{1, \cdots, n\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ soit constante. La subdivision X est alors dite* **adaptée** *à f.*

Proposition 3.18 (Intégrale des fonctions en escalier)**.**
Toute fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
De plus, si $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ c'est à dire telle que φ soit constante égale à λ_i sur $]a_{i-1}, a_i[$, alors

$$\int_a^b \varphi(t)\, dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1}).$$

Remarque. Le résult est naturel ... mais pas si simple ! En effet :

- les bornes inférieures et supérieures des sommes de Darboux dont calculées sur $[a_{i-1}, a_i]$ et non $]a_{i-1}, a_i[$,

- il est facile de trouver ***une*** somme de Riemann qui vaut $\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1})$.

Démonstration :

Proposition *Toute fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. De plus, si $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ c'est à dire telle que φ soit constante égale à λ_i sur $]a_{i-1}, a_i[$, alors $\int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i - a_{i-1})$.*

Démonstration : • φ est bornée, il existe des réels m et M tels que

$$\forall x \in [a,b],\ m \leqslant \varphi(x) \leqslant M.$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{2}{k} < \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Min}}(a_i - a_{i-1})$.

- Considérons la subdivision X'_k de $[a,b]$ définie par :

$$a'_0 = a_0 < a'_1 = a_0 + \frac{1}{k} < a'_2 = a_1 - \frac{1}{k} < \cdots < a'_{2n} = a_n - \frac{1}{k} < a'_{2n+1} = a_n$$

et posons $\Delta = S(\varphi, X'_k) - s(\varphi, X'_k)$.

- La subdivision X'_k comporte :

- n intervalles du type $[a_{i-1} + \frac{1}{k}, a_i - \frac{1}{k}]$ sur lesquels φ est constante et qui apportent donc une ***contribution nulle à Δ***.
- $n-1$ intervalles du type $[a_i - \frac{1}{k}, a_i + \frac{1}{k}]$ qui apportent chacun à Δ une ***contribution majorée par $\frac{2}{k}(M-m)$***.
- les intervalles $[a_n - \frac{1}{k}, a_n]$ et $[a_0, a_0 + \frac{1}{k}]$ qui apportent chacun une ***contribution majorée par $\frac{1}{k}(M-m)$***.

Finalement

$$S(\varphi, X'_k) - s(\varphi, X'_k) \leqslant (n-1)\frac{2}{k}(M-m) + 2\frac{1}{k}(M-m) = \frac{2(M-m)n}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

et φ est bien intégrable.

Ce raisonnement montre d'autre part que

$$s(\varphi, X'_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1} - \frac{2}{k}) + B$$

avec $|B| \leqslant \dfrac{2Mn}{k}$ et donc

$$\lim_{k\to\infty} s(\varphi, X'_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1}).$$

Mais ***le pas de*** X'_k ***ne tend pas vers*** 0, on ne peut pas encore conclure sur la valeur de l'intégrale...

- On considère alors une subdivision plus fine

$$X''_k = \{a_0, a_0 + \frac{1}{k}, a_0^1, a_0^2, \cdots, a_0^{\alpha_0}, a_1 - \frac{1}{k}, \cdots, a_n - \frac{1}{k}, a_n\}$$

obtenue en subdivisant chaque $[a_i + \frac{1}{k}, a_{i+1} - \frac{1}{k}]$ à l'aide de points $a_i^1, a_i^2, \cdots, a_i^{\alpha_i}$ tels que $a_i^j - a_i^{j-1} < \frac{1}{k}$.

- En notant $a_i^0 = a_i + \frac{1}{k}$ et $a_i^{\alpha_i+1} = a_{i+1} - \frac{1}{k}$, la contribution totale de ces sous-intervalles de $[a_i + \frac{1}{k}, a_{i+1} - \frac{1}{k}]$ à $s(\varphi, X''_k)$ est

$$\sum_{j=1}^{\alpha_i+1} (a_i^j - a_i^{j-1})\lambda_i = (a_{i+1} - a_i - \frac{2}{k})\lambda_i.$$

- On a donc $s(\varphi, X''_k) = s(\varphi, X'_k)$ et le résultat s'en déduit puisque $p(X''_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

$\square$

Théorème 3.19 (Fonctions continues par morceaux)**.**
Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ *est intégrable au sens de Riemann sur* $[a, b]$*.*
De plus, si la subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ *est telle que la restriction de* f *à chaque intervalle ouvert* $]a_i, a_{i+1}[$ *ait un prolongement par continuité* $g_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$*, alors :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i(t)\,dt$$

Démonstration : Cela résultera :

- de la proposition 3.22 (***modifier une fonction en un nombre fini de points ne change pas l'intégrale***)

- et de la relation de Chasles,

toutes deux ***énoncées et démontrées plus loin***. $\square$

3.5 Opérations sur les fonctions intégrables

Proposition 3.20 (Linéarité de l'intégrale)**.** *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, et soit λ un nombre réel. Alors :*

1. *$f+g$ est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$,*
2. *λf est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.*

Démonstration : ***Point 1.*** Soit X est une subdivision de $[a,b]$. On a

$$\inf\{(f+g)(x),\ x\in[a_{i-1},a_i]\} \geqslant \inf\{f(x),\ x\in[a_{i-1},a_i]\} + \inf\{g(x),\ x\in[a_{i-1},a_i]\}.$$

En effet, le terme de droite de l'inégalité est un minorant de $f+g$ sur $[a_{i-1},a_i]$.

- En sommant ces inégalités (après multiplication par $a_i - a_{i-1} > 0$), on obtient

$$s(f+g,X) \geqslant s(f,X) + s(g,X).$$

- De manière symétrique on a $S(f+g,X) \leqslant S(f,X) + S(g,X)$.

- On en déduit donc

$$0 \leqslant S(f+g,X) - s(f+g,X) \leqslant S(f,X) - s(f,X) + S(g,X) - s(g,X)$$

• Puisque f et g sont intégrables sur $[a,b]$, le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 lorsque $p(X)$ tend vers 0. Il en est donc de même de $S(f+g,X) - s(f+g,X)$ et $f+g$ est donc intégrable.

- De plus,

$$s(f,X)+s(g,X) \leqslant s(f+g,X) \leqslant \int_a^b (f+g) \leqslant S(f+g,X) \leqslant S(f,X)+S(g,X)$$

En passant à la limite dans ces inégalités on obtient bien $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Point 2. Le cas $\lambda = 0$ est trivial.

• En supposant $\lambda > 0$, on a pour toute subdivision X les égalités $s(\lambda f, X) = \lambda s(f, X)$ et $S(\lambda f, X) = \lambda S(f, X)$.

• Si $\lambda < 0$, la multiplication par λ renverse les inégalités et donc

$$s(\lambda f, X) = \lambda S(f, X) \quad \text{et} \quad S(\lambda f, X) = \lambda s(f, X).$$

• Comme f est intégrable sur $[a, b]$,

$$\lim_{p(X)\to 0} s(f, X) = \int_a^b f = \lim_{p(X)\to 0} S(f, X).$$

• Par suite,

$$\lim_{p(X)\to 0} s(\lambda f, X) = \lambda \int_a^b f = \lim_{p(X)\to 0} S(\lambda f, X)$$

ce qui montre que λf est intégrable et que son intégrale est λ fois celle de f. $\square$

Nous admettrons par ailleurs le résultat suivant :

Théorème 3.21. *Si f_1 et f_2 sont des fonctions bornées intégrables sur l'intervalle $[a,b]$, le produit f_1f_2 est aussi intégrable.*

Conséquence. Comme on sait, par ailleurs, que $f_1 + f_2$ est intégrable, on déduit : L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur le segment $[a,b]$ est un anneau.

Proposition 3.22. *Si la fonction f est intégrable sur $[a,b]$ et si g est obtenue à partir de f en modifiant la valeur de f en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors g est aussi intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration : • Supposons que g diffère de f uniquement en les points c_1, $c_2, \cdots, c_k$ de $[a,b]$.

- Alors $g-f$ est nulle en dehors de ces points et c'est donc une fonction en escalier.
- Par suite $g-f$ est intégrable sur $[a,b]$ et son intégrale est nulle.
- On en déduit que $g = (g-f)+f$ est intégrable et que son intégrale est $\displaystyle\int_a^b f$.

$\square$

3.6 Propriétés de l'intégrale de Riemann

3.6.1 Propriété de la moyenne

Proposition 3.23. *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a, b]$, et soit m et M des réels tels que pour tout x de $[a, b]$ on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Alors*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Si en outre f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$.

La quantité $(\int_a^b f(x)\,dx)/(b-a)$ est appelé **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$.

La ***propriété de la moyenne*** nous dit donc que si f est comprise entre m et M sur $[a, b]$, alors sa valeur moyenne est aussi comprise entre m et M.

Démonstration : Le premier point est clair puisque, pour toute subdivision X de $[a, b]$, on a :

$$m(b-a) \leqslant s(f, X) \leqslant S(f, X) \leqslant M(b-a).$$

• Si f est continue sur le segment $[a, b]$ elle est bornée et atteint ses bornes en des points c_1 et c_2 de $[a, b]$.

• Le premier point montre alors que

$$f(c_1) \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant f(c_2).$$

• f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un c dans $[a, b]$ tel que

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c).$$

$\square$

3.6.2 Relation de Chasles

Proposition 3.24. *Soit $a < b < c$ trois nombres réels, et soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. Alors f est intégrable sur $[a, c]$ et*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Démonstration :

- Soit $X = \{a_0, ..., a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, et soit $Y = \{b_0, ..., b_p\}$ une subdivision de $[b, c]$.

- Alors $Z = \{a_0, ..., a_n, b_1, ..., b_p\}$ est une subdivision de $[a, c]$, et on a

$$s(f, X) + s(f, Y) = s(f, Z) \qquad S(f, X) + S(f, Y) = S(f, Z).$$

- Donnons nous $\varepsilon > 0$. Il existe des subdivisions X et Y de $[a, b]$ et $[b, c]$ telles que

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, X) \leqslant S(f, X) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\int_b^c f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, Y) \leqslant S(f, Y) < \int_b^c f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

- En prenant Z la subdivision de $[a, c]$ définie ci-dessus, on obtient

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \varepsilon < s(f, Z) \leqslant S(f, Z) < \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \varepsilon.$$

Ceci montre que f est intégrable sur $[a, c]$, et que son intégrale sur $[a, c]$ est la somme de celles sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. $\square$

Exercice 3.1. Montrer que si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $a < c < b$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

On veut étendre la relation que l'on vient de montrer au cas où les nombres réels a, b et c sont en position quelconque.

Pour ceci, on pose :

$$\boxed{\text{Si } b < a, \text{ alors } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad \text{Si } a = b, \int_a^a f(x)dx = 0.}$$

Corollaire 3.25 (Relation de Chasles)**.** *Soit a, b et c trois nombres réels. Soit f une fonction intégrable sur un intervalle fermé contenant a, b et c. Alors*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Démonstration : Traitons le cas $a < c < b$.

La proposition précédente donne

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

ce qui est le résultat avec la convention adoptée. □

Exercice 3.2. À l'aide de cette relation, démontrer le théorème 3.19 sur l'intégrabilité des fonctions continues par morceaux.

3.6.3 Intégrale et relation d'ordre

Proposition 3.26 (Positivité)**.**
1) Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a,b]$. Si f est positive ou nulle sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.
2) Si f est continue sur $[a,b]$, l'intégrale n'est nulle que si et seulement si f est identiquement nulle.

Démonstration :

Point 1 cela résulte de la formule de la moyenne (en prenant $m=0$).

Point 2 Supposons f positive ou nulle et non identiquement nulle sur $[a,b]$.

- Il existe donc $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$.

- On a $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ par continuité de f, et donc

$$\exists \delta > 0, \forall x \in [c-\delta, c+\delta], \quad f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}.$$

- La propriété de la moyenne montre alors que $\displaystyle\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx$ est minoré par $(c+\delta-(c-\delta))\dfrac{f(c)}{2} = \delta f(c)$.

- Par ailleurs on peut minorer $\displaystyle\int_a^{c-\delta} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$ par 0, puisque f est positive ou nulle.

- Donc, par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$$
$$\geqslant (c+\delta-(c-\delta))\frac{f(c)}{2} = \delta f(c) > 0.$$

$\square$

Attention : on ne peut pas enlever l'hypothèse « f continue » dans la proposition précédente.

Par exemple la fonction f qui vaut 0 sur $[0, 1/2[\cup]1/2, 1]$ et telle que $f(1/2) = 1$ a une intégrale nulle, bien que f soit positive ou nulle et non identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Corollaire 3.27 (Croissance de l'intégrale)**.** *Soit f et g deux fonctions réelles intégrables sur $[a, b]$. Si on a $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration : Cela résulte de la proposition précédente (puisque $g - f \geqslant 0$) et de la linéarité de l'intégrale. □

Exercice 3.3. Peut-on trouver a et b tels que $\int_a^b x\,\mathrm{d}x$ soit égale à -1, 0 ou 1 ?
Même question avec $x \mapsto x^2$.

Exercice 3.4. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f^2 = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Proposition 3.28. *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a,b]$. Alors sa valeur absolue $|f|$ est aussi intégrable sur $[a,b]$, et on a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Démonstration : Le point important est de démontrer l'intégrabilité de $|f|$.

• Soit X une subdivision de $[a,b]$. Plaçons nous sur un intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ du découpage donné par la subdivision.

• Soit m_i et M_i les bornes inférieure et supérieure de f sur cet intervalle, l_i et L_i celles de $|f|$.

• Trois cas sont à distinguer :

- Si $0 \leqslant m_i \leqslant M_i$, alors $l_i = m_i$ et $L_i = M_i$.
- Si $m_i \leqslant M_i \leqslant 0$, alors $l_i = -M_i$ et $L_i = -m_i$.
- Si $m_i < 0 < M_i$, alors $l_i \geqslant 0$ et $L_i = \max(-m_i, M_i)$.

• Dans les trois cas, on a $L_i - l_i \leqslant M_i - m_i$.

• Comme ceci a lieu pour tout intervalle de la subdivision, on en déduit

$$S(|f|,X) - s(|f|,X) \leqslant S(f,X) - s(f,X).$$

Cette inégalité et l'intégrabilité de f montrent que $|f|$ satisfait le critère d'intégrabilité.

***Inégalité** $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$:* c'est conséquence des inégalités

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

et du corollaire précédent. $\square$

Exemple. Soit $I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx$. Montrons que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

- Déja l'intégrale existe par continuité de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+x^n}$ sur $[1, n]$.

- D'après la proposition précédente, on a

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx\right| \leq \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\,dx.$$

- Par le corollaire précédent

$$\int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx.$$

- En anticipant sur la suite du chapitre, on effectue le calcul :

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^n x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n.$$

- Enfin

$$\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} = \frac{e^{(-n+1)\ln n}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Proposition 3.29 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit f et g deux fonctions réelles intégrables sur $[a, b]$. Alors :*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$$

De plus, si f et g sont continues, on a égalité si et seulement si f est identiquement nulle ou s'il existe une constante λ de $\mathbb{R}$ telle que $g = \lambda f$.

Démonstration :

- Soit X un nombre réel. La fonction $(g - Xf)^2$ est intégrable ***(pourquoi ?)***

- Puisque $(g - Xf)^2 = g^2 - 2Xfg + X^2f^2$, la linéarité de l'intégrale conduit à

$$\int_a^b (g - Xf)^2 = \int_a^b g^2 - 2X\int_a^b fg + X^2\int_a^b f^2.$$

- L'intégrale $\int_a^b (g - Xf)^2$ est positive ou nulle (positivité de l'intégrale).

- On en déduit que pour tout réel X,

$$\int_a^b g^2 - 2X\int_a^b fg + X^2\int_a^b f^2 \geqslant 0.$$

- Posons

$$\alpha = \int_a^b f^2(x)dx, \qquad \beta = \int_a^b f(x)g(x)dx, \qquad \gamma = \int_a^b g^2(x)dx.$$

On a donc pour tout réel X :

$$\alpha X^2 - 2\beta X + \gamma \geqslant 0.$$

On va étudier le discriminant de ce polynôme du second degré en X.

$$\forall X \in \mathbb{R}, \qquad \alpha X^2 - 2\beta X + \gamma \geqslant 0.$$

- Si $\alpha = \int_a^b f^2(x)dx \neq 0$, on a un trinôme du second degré qui est de signe constant donc de discriminant négatif.
  Par suite $\Delta = 4\beta^2 - 4\alpha\beta \leqslant 0$ ce qui donne l'inégalité voulue.

- Si $\alpha = \int_a^b f^2(x)dx = 0$, vérifier l'inégalité annoncée revient alors à montrer que $\beta = \int_a^b fg = 0$.
  Sinon, on aurait par exemple $\beta = \int_a^b fg < 0$.
  En faisant tendre X vers $-\infty$ dans l'inégalité, on obtient une contradiction.

Traitons à présent le cas d'égalité :
si f et g sont continues, on a égalité si et seulement si f est identiquement nulle ou s'il existe une constante λ de $\mathbb{R}$ telle que $g = \lambda f$.

- Si f est la fonction nulle ou si $g = \lambda f$ pour une constante réelle λ, on vérifie directement l'égalité $\beta^2 = \alpha\gamma$.
- Si $\beta^2 = \alpha\gamma$ et si f n'est pas la fonction nulle, alors le polynôme du second degré précédent a un discriminant nul donc une racine réelle double x_0 :

$$\int_a^b (g - x_0 f)^2(x)dx = 0.$$

  - Remarquons que $(g - x_0 f)^2$ est une fonction continue positive ou nulle sur $[a, b]$.

  - On a donc $g = x_0 f$ d'après la proposition 3.26.

□

3.7 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 3.30. *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$. Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.*
Alors la fonction F est dérivable sur I, et sa dérivée F' est égale à f.

Démonstration :

- Si x et $x+h$ sont dans I, on a, par la relation de Chasles,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

• Par la propriété de la moyenne, on a $F(x+h) - F(x) = hf(u)$ avec u compris entre x et $x+h$.

- Pour $h \neq 0$ on a finalement

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(u),$$

et quand h tend vers 0, u qui est coincé entre x et $x+h$ tend vers x.

- Comme f est continue sur I, $f(u)$ tend vers $f(x)$.

- Ainsi le nombre dérivé de F en x existe et vaut $f(x)$. □

Corollaire 3.31.
Toute fonction réelle continue sur un intervalle I a une primitive sur I.

Remarques.

1. Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante. La fonction
$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
est l'unique primitive de F qui s'annule en a.

2. Si F est une primitive de f sur I, alors pour tous les réels a et b de I on a
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$
On emploie la notation $[F(x)]_a^b$ pour désigner $F(b) - F(a)$.

Ceci donne une première méthode pour calculer des intégrales !

Pour cela, il faut connaitre les primitives usuelles...

Exemple.

1. Une primitive de *exp* est elle-même, d'où :
$$\int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$
2. Une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ donc
$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$
3. On a
$$\int_a^x \cos t \, dt = \left[\sin t\right]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$$
qui induit donc une primitive de la fonction cos.

Plus généralement, on rappelle le tableau des primitives usuelles :

$\int e^x \, dx = e^x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \text{ sur }]0, +\infty[$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + c \quad \text{sur }]0, +\infty[\text{ ou }]-\infty, 0[$
$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c, \int \cosh x \, dx = \sinh x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \quad \text{sur }]-1, 1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \text{Argsh} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \text{Argch} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases} \quad \text{sur } x \in]1, +\infty[$

Comment lire le tableau.

• Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ alors la fonction $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

• Les primitives de f sont les fonctions définies par $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (pour c une constante réelle quelconque).

• On écrit $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Remarques.

1. La variable sous le symbole intégrale est une variable muette. On peut aussi bien écrire $\int t^n \, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.
2. La constante est définie pour un intervalle. Si l'on a deux intervalles, il y a deux constantes qui peuvent être différentes.

   • Par exemple pour $\int \frac{1}{x} \, dx$ nous avons deux domaines : $I_1 =]0, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 0[$.

   • Donc $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c_1$ si $x > 0$ et $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c_2 = \ln(-x) + c_2$ si $x < 0$.

3. On peut trouver des primitives aux allures très différentes.

   • Par exemple $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto -\arccos x$ sont deux primitives de la même fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   • Mais on sait que $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, donc les primitives diffèrent bien d'une constante !

Exercice 3.5. Soit f une fonction continue impaire. Montrer que ses primitives sont paires. En déduire que $\int_{-a}^{a} f(t) \, dt = 0$.

Exercice 3.6. Montrer que la fonction $\Phi : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \ell n(t) dt$ est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et que sa dérivée est $\Phi' : x \longmapsto (4x-1) \ell n \, x$.

Remarque. Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive.

- Par exemple $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

- Si F est une primitive de f, elle est constante (disons égale à c) sur $[0, \frac{1}{2}[$.

- Elle vaut $x \mapsto x + c - \frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

- Mais alors F n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$.

3.8 Calcul d'intégrales

3.8.1 Intégration par parties

Théorème 3.32 (Intégration par parties)**.** *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I contenant les réels a et b. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Démonstration : • f et g étant dérivables sur I, il en est de même de fg et on a (dérivation d'un produit) $(fg)' = f'g + fg'$.

• Toutes ces fonctions étant Riemann-intégrables (car continues) sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$), la linéarité de l'intégrale entraîne

$$\int_a^b fg' = \int_a^b (fg)' - \int_a^b f'g.$$

• Enfin fg est une primitive de $(fg)'$. □

Exemple.

1. Calcul de $\int_0^1 xe^x\,dx$.

   On pose $f(x) = x$ et $g(x) = e^x$, de sorte que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $g'(x) = e^x$.

   La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx \\
&= \big[f(x)g(x)\big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)\,dx \\
&= \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\
&= \big(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\big) - \big[e^x\big]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Calcul d'une primitive de arcsin.

   La fonction arcsin est de classe $\mathscr{C}$ sur $]-1,1[$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot \arcsin x \, dx &= \left[x \arcsin x\right] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \left[x \arcsin x\right] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}$$

Exercice 3.7. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \tfrac{e^2+1}{4}.$$

Exercice 3.8. Montrer à l'aide de deux intégrations par parties qu'une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ est

$$x \mapsto (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

Corollaire 3.33 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Pour tous réels a et b dans I on a*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

Remarque. Cette formule de Taylor a un caractère ***global*** (sur un intervalle), et non seulement local comme la formule de Taylor-Young.

Démonstration : • Pour $n = 0$ et f de classe C^1, la formule se résume à

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$$

ce qui résulte de l'égalité $\int_a^b f'(t)dt = [f(t)]_a^b$.

• Pour $n = 1$ et f de classe C^2, on procède à une intégration par parties dans l'intégrale $\int_a^b f'(t)dt$.
Les fonctions $u : t \mapsto t - b$ et $v = f'$ étant de classe C^1 sur I, on a

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t))]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

soit

$$\int_a^b f'(t)\,dt = [(t-b)f'(t)]_a^b - \int_a^b (t-b)f''(t)\,dt = (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)dt.$$

• On raisonne en fait par récurrence sur n. On pose comme hypothèse à l'ordre $n \in \mathbb{N}$:

si f est de classe C^{n+1} sur I, pour tous réels a et b dans I on a

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

Hypothèse à l'ordre $n \in \mathbb{N}$:

si f est de classe C^{n+1} sur I, pour tous réels a et b dans I on a

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

• L'hypothèse de récurrence est vraie à l'ordre 0 (et même 1).

• Supposons $n \in \mathbb{N}^*$, et la formule établie pour $n-1$. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I.

• Le reste de la formule à l'ordre $n-1$ est

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt,$$

il peut s'intégrer par parties car on suppose f de classe C^{n+1}. On obtient :

$$\frac{1}{(n-1)!}\left[f^{(n)}(t)\frac{-(b-t)^n}{n}\right]_a^b - \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{-(b-t)^n}{n}dt$$

$$= (b-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

• On obtient donc la formule à l'ordre n. $\square$

Conséquence. (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I telle que $f^{(n+1)}$ soit majorée en valeur absolue par un réel M sur I. Alors, pour tous a et b dans I on a :

$$\left| f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \cdots - (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration : Cela résulte de la majoration de la valeur absolue d'une intégrale par l'intégrale de la valeur absolue. □

Exemple. Donnons une approximation de e à 10^{-4} près.

La fonction *exp* est de classe C^∞. La formule de Taylor à l'ordre n sur $[0,1]$ donne

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 e^t (1-t)^n dt$$

Une étude de fonction montre que $x \mapsto e^x (1-x)^n$ est majorée par 1 sur $[0,1]$.

Alors

$$0 \leqslant \int_0^1 e^t (1-t)^n dt \leqslant 1$$

et

$$0 \leqslant e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n!}.$$

Pour $n = 8$ on obtient $n! > 10^4$, et donc $e \simeq \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!}$ à 10^{-4} près.

3.8.2 Changement de variables

Théorème 3.34 (Changement de variables). *Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert J, et soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle ouvert I et à valeurs dans J. Si a et b sont dans I,*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Démonstration : • Soit F une primitive de f sur J.

• La fonction $F\circ\varphi$ est dérivable sur I par composition et on a $(F\circ\varphi)' = \varphi' \times f\circ\varphi$.

• Toutes ces fonctions étant Riemann-intégrables (car continues) sur $[a,b]$ (ou $[b,a]$), cela entraîne

$$\int_a^b (F\circ\varphi)' = \int_a^b \varphi' \times f\circ\varphi$$

soit

$$F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = \int_a^b \varphi' \times f\circ\varphi$$

ce qui est le résultat annoncé puisque

$$F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

□

(Changement de variables) Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert J, et soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle ouvert I et à valeurs dans J. Si a et b sont dans I,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Exemple. Calcul de

$$\int_0^{1/2} \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt$$

• la fonction intégrée est continue sur le segment $[0, 1/2]$, donc l'intégrale est bien définie.

• La fonction $\varphi : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto 1 - t^2$ est de classe C^1. On va effectuer le changement de variables $x = \varphi(t) = 1 - t^2$.

• On a $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1/2) = 3/4$ et $\varphi'(t) = -2t$. Ainsi

$$\frac{t}{(1-t^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2}\frac{-2t}{(1-t^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2}\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^{3/2}}.$$

• Soit $f : [3/4, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$. On a alors

$$\frac{t}{(1-t^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

• On a alors par changement de variables :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{t\,dt}{(1-t^2)^{3/2}} &= -\frac{1}{2}\int_0^1 f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} f(x)dx \\
&= -\frac{1}{2}\big[-2x^{-1/2}\big]_1^{3/4} = \big[\frac{1}{\sqrt{x}}\big]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.
\end{aligned}$$

Exemple. Calculons une primitive de la fonction tangente par deux méthodes.

Notons $F = \int \tan t \, dt$.

$$F = \int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \, .$$

• Par une ***primitive***.

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$, dont une primitive est $\ln |u|$.

Donc

$$F = \int -\frac{u'}{u} = -\big[\ln |u|\big] = -\ln |u| + c = -\ln |\cos t| + c.$$

• En terme de ***changement de variables***.

La fonction cosinus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, d'où

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \, dt$$

ou encore

$$F(x) = \int^x -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \, dt$$

Notons f la fonction définie par $f(u) = \frac{1}{u}$, qui est bien définie tant que $u \neq 0$. Alors

$$F = -\int^x \varphi'(t) f(\varphi(t)) \, dt$$

En posant $u = \varphi(t)$ par la formule du changement de variable, on a

$$F(x) = -\int^{\varphi(x)} f(u) \, du = -\int^{\varphi(x)} \frac{1}{u} \, du = -\ln |\varphi(x)| + c \, .$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien

$$F(x) = -\ln |\cos x| + c.$$

Remarque.
L'intégrale est bien définie tant que $\tan t$ est définie, donc $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$.
Sur un intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, la primitive est de la forme $-\ln |\cos x| + c$.
Mais la constante c peut être différente sur un intervalle différent.

Nous savons intégrer beaucoup de fonctions simples.

Par exemple toutes les fonctions polynomiales : si $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ alors

$$\int f(x)\,dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Mais beaucoup de fonctions ne s'intègrent pas à l'aide de fonctions simples !

Exemple. Pour $f(t) = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$ alors l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ ***ne peut pas*** s'exprimer comme somme, produit, inverse ou composition de fonctions que vous connaissez.
Cette intégrale vaut la longueur d'une ellipse d'équation paramétrique $(a\cos t, b\sin t)$; il n'y a donc pas de formule pour le périmètre d'une ellipse (sauf si $a = b$ auquel cas l'ellipse est un cercle !).

Les fonctions rationnelles en x (quotients de deux fonctions polynômes) sont des fonctions dont on peut toujours calculer une primitive (en théorie du moins).

3.9 Intégrales des fonctions rationnelles

L'outil fondamental est la ***décomposition en éléments simples***, qui permet d'écrire une fonction rationnelle comme somme :

- d'une fonction polynôme (partie entière) dont on a facilement une primitive,
- d'éléments simples de première espèce du type $\dfrac{\lambda}{(x-a)^n}$, dont on connaît une primitive puisque

$$\int \frac{\lambda}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1-n}\,\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1, \\ \lambda \ell n|x-a| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

- d'éléments simples de deuxième espèce du type $\dfrac{\lambda x + \mu}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^n}$ avec $b \neq 0$.

Pour les éléments simples de deuxième espèce, le calcul est plus délicat :

Pour les éléments simples de deuxième espèce, on écrit d'abord

$$\int \frac{\lambda x+\mu}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx=\frac{\lambda}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx+\frac{\lambda a+\mu}{b^{2n-1}}\int \frac{\frac{dx}{b}}{\left(\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1\right)^n}.$$

Pour la ***première*** primitive, on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ et donc :

$$\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{1-n}\,\dfrac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{n-1}} & \text{si } n\neq 1,\\ \ell n\left((x-a)^2+b^2\right) & \text{si } n=1\end{cases}$$

La ***deuxième*** primitive se ramène, par le changement de variable $t=(x-a)/b$, $dt=dx/b$, au calcul de

$$I_n(t)=\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Calcul de $I_n(t)$

- $I_1(t)=\arctan t$, et
- $I_n(t)$ se calcule par récurrence sur n en utilisant une intégration par parties.

$$\begin{aligned}I_n(t) &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}\\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n}-\int \frac{-2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt\\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n}+2n\int\left(\frac{1}{(1+t^2)^n}-\frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right)dt\\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n}+2nI_n-2nI_{n+1},\end{aligned}$$

d'où

$$I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left((2n-1)I_n+\frac{t}{(1+t^2)^n}\right).$$

On obtient ainsi en théorie une primitive de n'importe quelle fonction rationnelle.

Attention : dans la pratique, il peut y avoir plus simple.

Exemple. La calcul de $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3}$ risque d'être très pénible en décomposant en éléments simples.

Par contre, en effectuant le changement de variable $u = x^2$, on a

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1)(u+1)^3},$$

Le théorème de décomposition en éléments simples assure alors l'existence de $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^3} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{(u+1)^3} + \frac{c}{(u+1)^2} + \frac{d}{u+1}$$

En multipliant par $u-1$ et en évaluant en 1 on obtient $a = 1/8$.
En multipliant par $(u+1)^3$ et en évaluant en -1 on obtient $b = -1/2$.
En multipliant par u et en faisant tendre u vers $+\infty$ on obtient $d = -1/8$.
En évaluant en 0 on trouve $c = -1/4$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{(u-1)(u+1)^3} &= \frac{1}{8}\ell n|u-1| + \frac{1}{4(u+1)^2} + \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{8}\ell n|u+1| \\ &= \frac{u+2}{4(u+1)^2} + \frac{1}{8}\ell n\left|\frac{u-1}{u+1}\right|,\end{aligned}$$

et

$$\int \frac{x\ dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3} = \frac{x^2+2}{8(x^2+1)^2} + \frac{1}{16}\ell n\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|.$$

Exercice 3.9. Pour f donnée par $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$, vérifier que

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right) + c$$

3.10 Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

On va faire une liste (non exhaustive...) de ***techniques de calcul*** propres à certains types d'intégrales.

3.10.1 Fonctions polynômiales en $\cos x$ et $\sin x$.

Le calcul de primitives de telles fonctions se ramène, par linéarité, à celui de primitives de la forme $\int \cos^n x \sin^m x \, \mathrm{d}x$.

— Si n (respectivement m) est impair, on fait le changement de variable $u = \sin x$ (respectivement $u = \cos x$).
On a alors $\int \cos^{2p+1} x \sin^m x \, \mathrm{d}x = \int (1 - u^2)^p u^m \, \mathrm{d}u$.

— Si m et n sont pairs, on linéarise l'expression.

3.10.2 Fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$.

Ce sont les fractions rationnelles en deux variables $R(u, v)$ dans lesquelles on remplace u par $\cos x$ et v par $\sin x$.

Pour calculer $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$, il y a un changement de variable qui marche toujours : c'est $t = \varphi(x) = \tan(x/2)$ (pour $x \in]-\pi, \pi[$), soit $x = 2 \arctan t$.

On a alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t,$$

et on est amené à calculer

$$\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t,$$

qui est une primitive d'une fraction rationnelle en t.

Exemple. Calcul de l'intégrale

$$\int_{-\pi/2}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}.$$

Par le changement de variables ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x} &= \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \\
&= 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2-2t} \\
&= 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1-t)^2} = 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 2\big(1-\frac{1}{2}\big) = 1
\end{aligned}$$

Remarque. les calculs ne sont ***pas très agréables en général***.

On a intérêt à essayer d'autres changements de variables.

"Truc" : **les règles de Bioche**

Soit $f : x \longmapsto R(\cos x, \sin x)$ la fonction à intégrer.

- Si l'élément $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on remplace x par $-x$, on fait le changement de variable $u = \cos x$.
- Si l'élément $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on remplace x par $\pi - x$, on fait le changement de variables $u = \sin x$.
- Si l'élément $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on remplace x par $\pi + x$, on fait le changement de variables $u = \tan x$.

Exemple. Calculer une primitive de $f(x) = (1 + \sin x)\tan x$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

- C'est une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$. Comme

$$f(\pi - x)\,\mathrm{d}(\pi - x) = -f(x)(-\,\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

on pose $u = \sin x$.

- On a alors $\mathrm{d}u = \cos x\ \mathrm{d}x$, et donc

$$\int \frac{u(1+u)}{1-u^2}\ \mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{1-u} - 1\right)\ \mathrm{d}u = -u - \ell n\,|1-u|,$$

d'où

$$\int (1+\sin x)\tan x\ \mathrm{d}x = -\sin x - \ell n\,(1 - \sin x).$$

Remarque. Avec $t = \tan(x/2)$, on aurait eu à calculer

$$\int \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1-t^2}\,\frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{4t(1+t)}{(1+t^2)^2(1-t)}\ \mathrm{d}t...$$

3.10.3 Fractions rationnelles en e^x, $\cosh x$, $\sinh x$.

On pose $u = e^x$, ce qui fait

$$dx = du/u, \quad \cosh x = \frac{1}{2}(u + 1/u), \qquad \text{et} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(u - 1/u).$$

On est alors ramené au calcul d'une primitive de fraction rationnelle en u.

3.10.4 Fractions rationnelles en x en $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+f}}$.

On veut calculer
$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/m}\right)\,\mathrm{d}x.$$
On pose $u = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+f}}$, d'où l'on tire
-$x = (-b + fu^m)/(a - cu^m)$, et
- $\mathrm{d}x$ est égal à une fraction rationnelle en u fois $\mathrm{d}u$.

On se retrouve à intégrer une fraction rationnelle en u.

Exemple. Calcul de $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$ sur $[1, +\infty[$ ou sur $]-\infty, -1[$.

On pose $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ d'où l'on tire $x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ et $\mathrm{d}x = \frac{4u}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u$.

On est amené à calculer
$$\begin{aligned}\int u\,\frac{1-u^2}{1+u^2}\,\frac{4u}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-u^2} - \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}\\ &= \ell n\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - 2\arctan u,\end{aligned}$$
donc
$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ell n\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \ell n\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

3.10.5 Fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

On fait un changement de variable $x = \lambda t + \mu$ pour se ramener à un radical d'une des formes

- $\sqrt{1+t^2}$, auquel cas on peut poser $t = \sinh u$,
- $\sqrt{t^2-1}$, auquel cas on peut poser $t = \cosh u$,
- $\sqrt{1-t^2}$, auquel cas on peut poser $t = \cos u$ ou $t = \sin u$.

(L'objectif est, dans chaque cas, de mettre l'expression sous le radical sous la forme d'un carré.)

Dans les trois cas, on se ramène à des primitives déjà traitées.

Voici un exemple, où le deuxième changement de variables est inutile.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

On pose $t = (x-1)/\sqrt{2}$, alors $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\ \mathrm{d}t$. On se ramène à

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t,$$

et donc

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} \qquad \text{pour } 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}.$$