Chapitre 1

Comparaison des fonctions - Développements limités

1.1 Comparaison locale des fonctions

On veut comparer des fonctions « quand x tend vers a ». Ici a pourra être un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Nous convenons ici que ***toutes les fonctions considérées*** sont définies au moins

- si $a \in \mathbb{R}$: sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a ;
- si $a = +\infty$: sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$;
- si $a = -\infty$: sur un intervalle de la forme $]-\infty, A[$.

On dit qu'une telle fonction f vérifie une propriété P ***au voisinage de*** $a \in \mathbb{R}$ lorsqu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que, pour tous les x de $I \cap D_f$, $f(x)$ vérifie P.

Dans le cas où $a = \pm\infty$, la définition est similaire avec un intervalle I de la forme $]M, +\infty[$ (resp. $]-\infty, M[$).

1.1.1 Fonctions équivalentes

Définition 1.1. *Soit f et g deux fonctions.*
On dit que $f(x)$ **est équivalent à** $g(x)$ **quand** x **tend vers** a *quand il existe une fonction h telle que $f = gh$ et que $\lim_{x\to a} h(x) = 1$.*
Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a, ceci revient à dire que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

On n'oubliera pas de toujours préciser en quel point les fonctions sont équivalentes (ou du moins de le garder toujours présent à l'esprit).

Exercice.

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ell n\,(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad ((1+x)^\alpha - 1) \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad (\cos x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2/2$$

$$\sinh x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \mathrm{tanh} x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad (\mathrm{cosh} x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} x^2/2$$

Quelques propriétés de l'équivalence.

Proposition 1.2. *1. L'équivalence de fonctions est une* **relation d'équivalence** *:*

- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ *(réflexivité)*
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *entraîne* $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ *(symétrie)*
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *et* $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ *entraînent* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ *(transitivité).*

2. Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ *et* $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$*, alors* $(f_1f_2)(x) \underset{x\to a}{\sim} (g_1g_2)(x)$*.*

3. Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ *et* $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$*, et si* $g_2(x)$ *ne s'annule pas au voisinage de* a *(sauf peut-être en* a*), alors* $(f_1/f_2)(x) \underset{x\to a}{\sim} (g_1/g_2)(x)$*.*

Démonstration : Vérifions la troisième propriété. $\square$

Troisième propriété :

Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, et si $g_2(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut-être en a), alors $(f_1/f_2)(x) \underset{x\to a}{\sim} (g_1/g_2)(x)$.

Démonstration : On suppose $f_i(x) = h_i(x)g_i(x)$ avec $\lim_{x\to a} h_i(x) = 1$, pour $i = 1, 2$.

Si $g_2(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f_2(x) = h_2(x)g_2(x)$ non plus.

On a

$$(f_1/f_2)(x) = (h_1/h_2)(x) \times (g_1/g_2)(x),$$

avec $\lim_{x\to a}(h_1/h_2)(x) = 1$. □

Exercice. Montrer que si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f(x)^n \underset{x\to a}{\sim} g(x)^n$.

Il faut ***se méfier des sommes*** : si on a $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, on n'a pas forcément $(f_1+f_2)(x) \underset{x\to a}{\sim} (g_1+g_2)(x)$.

Par exemple on a $-x^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^3+x$ et $x^3+x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$, mais on n'a pas $x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$! !

On ne peut pas non plus ***composer des équivalents***.

Par exemple, on a $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$, mais e^x n'est pas équivalent à e^{x+1} quand x tend vers $+\infty$!

L'usage des équivalents (quand x tend vers a) permet de calculer certaines limites (en a).
Par exemple

$$x^2\left((1+x)^3-1\right) \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \times 3x = 3x^3$$

et

$$\sin x\,.(1-\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} x \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2},$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left((1+x)^3-1\right)}{\sin x(1-\cos x)} = 6.$$

Remarques.

- Deux fonctions équivalentes en a ont nécessairement le même signe sur un voisinage de a.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

1.1.2 Fonction négligeable devant une autre, dominée par une autre

Définition 1.3. *On dit que* $f(x)$ **est négligeable devant** $g(x)$ **quand** x **tend vers** a *s'il existe une fonction* ϵ*, telle que* $\lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0$ *et que* $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ *au voisinage de* a*.*
Si g *ne s'annule pas au voisinage de* a*, sauf peut-être en* a*, ceci revient à dire que* $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = 0$*.*

On note $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$*.*

La notation $f(x) = o(g(x))$ est un ***abus de notation*** (si on a aussi $h(x) = o(g(x))$, ce n'est pas pour cela que $f(x) = h(x)$).

Exemples.
- $x^m = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ si et seulement si $m > n$.
- $x^m = \underset{x\to +\infty}{o}(x^n)$ si et seulement si $m < n$.
- $\ell n\,(x) = \underset{x\to +\infty}{o}(x^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice. Montrer que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

Définition 1.4. *On dit que* $f(x)$ **est dominé par** $g(x)$ **quand** x **tend vers** a *quand il existe une constante réelle* $K > 0$ *telle que* $|f(x)| \leqslant K\,|g(x)|$ *au voisinage de* a*.*
On écrit $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$*.*

La notation $f(x) = O(g(x))$ est encore un abus.

Exemples :
- $x\sin(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(x)$
- $2x^3 + 15x^2 = \underset{x\to 0}{O}(x^2)$
- $2x^3 + 15x^2 = \underset{x\to+\infty}{O}(x^3)$.

On a aussi :

$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(1) \Longleftrightarrow f \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

Exercice. Démontrer les propriétés suivantes (tout a lieu quand $x \to a$).

1. Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) = O(g(x))$.
2. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) = O(g(x))$.
3. Si $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) = O(h(x))$
4. Si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.
5. Si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors $(f_1 + f_2)(x) = o(g(x))$.
6. Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, alors $(f_1 f_2)(x) = o(g_1 g_2)(x)$.

Une erreur à ne pas faire :
si $f(x) = o(g_1(x))$ et $f(x) = o(g_2(x))$ quand $x \to a$, on ne peut pas en déduire que $f(x) = o((g_1 + g_2)(x))$ quand $x \to a$.

Par exemple, prendre $f(x) = x^3$, $g_1(x) = x^2 + x^3$, $g_2(x) = -x^2$ quand $x \to 0$.

Remarque. Les notations o et O sont appelées notations de Landau (Edmund Landau (1877–1938), mathématicien allemand)

1.2 Développements limités

1.2.1 Formule de Taylor avec reste de Young

Théorème 1.5. *Soit a un nombre réel et $n \geqslant 1$ un entier. Soit f une fonction réelle définie et $n-1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. On suppose que f a une dérivée n-ième $f^{(n)}(a)$ en a. Alors, pour $a+h \in I$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,h^n + h^n\epsilon(h) \qquad \textit{avec} \qquad \lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0.$$

Ou encore,

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0$.

Remarques...

Théorème. *Soit a un nombre réel et $n \geqslant 1$ un entier. Soit f une fonction réelle définie et $n-1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. On suppose que f a une dérivée n-ième $f^{(n)}(a)$ en a. Alors, pour $a+h \in I$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,h^n + h^n\epsilon(h) \qquad \textit{avec} \qquad \lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0.$$

Ou encore,

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0$.

Remarques.

- Le reste peut aussi s'écrire $\underset{h\to 0}{o}(h^n)$ ou $\underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.

- A l'ordre 1, la formule s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0.$$

C'est simplement écrire que f a pour dérivée $f'(a)$ en a.

- Brook Taylor (1685–1731) et William Henry Young (1863–1942), mathématiciens anglais

Démonstration : • Posons, pour $x \in I$,

$$g(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,(x-a)^{n-1}\,.$$

On vérifie facilement que $g(a) = f(a)$ et que $g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

• Fixons $x \in I \backslash \{a\}$ et posons, pour $t \in I$,

$$\Phi(t) = f(t) - g(t) - A\,(t-a)^n$$

où A est une constante (vis à vis de t).

La fonction Φ est $n-1$ fois dérivable sur I.

On constate que $\Phi(a) = \Phi'(a) = \ldots = \Phi^{(n-1)}(a) = 0$.

On choisit alors A en sorte que $\Phi(x) = 0$ ce qui revient à poser

$$A = \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n}.$$

Suite de la démonstration :

$\Phi(t) = f(t) - g(t) - A\,(t-a)^n$ ***avec*** $A = \dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n}$***, et***

$$\Phi(x) = \Phi(a) = \Phi'(a) = \ldots = \Phi^{(n-1)}(a) = 0.$$

D'après le ***théorème de Rolle*** :

- il existe c_1 entre a et x tel que $\Phi'(c_1) = 0$.
- il existe c_2 entre a et c_1 tel que $\Phi''(c_2) = 0$.
- En continuant ainsi, on trouve c_{n-1}, entre a et x, tel que $\Phi^{(n-1)}(c_{n-1}) = 0$.

Comme

$$\Phi^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a) - A\,n!(t-a),$$

on obtient

$$\frac{f^{(n-1)}(c_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{(c_{n-1}-a)} = An!$$

Quand x tend vers a, alors c_{n-1} (qui est coincé entre a et x) tend vers a.

Comme $f^{(n-1)}$ ***est dérivable en*** a, on a alors

$$A.n! \xrightarrow[x\to a]{} f^{(n)}(a)$$

ce qui permet d'écrire

$$A = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\epsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \epsilon_1(x) = 0.$$

Suite de la démonstration :

On a obtenu

$$A = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\epsilon_1(x) \qquad \textbf{\textit{avec}} \qquad \lim_{x\to a} \epsilon_1(x) = 0,$$

sachant que $A = \dfrac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n}$**.**

Ainsi

$$\frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\epsilon_1(x),$$

donc en simplifiant

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) = \frac{\epsilon_1(x)}{n!} \xrightarrow[x\to a]{} 0$. $\square$

Exemple. En $a = 0$, la formule de Taylor avec reste de Young s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Pour $f : x \longmapsto e^x$ (qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$), on a $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout k, et la formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit :

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ .}$$

Exemple. Soit α un nombre réel. Alors $f(x) = (1+x)^\alpha$ définit une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, et $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\ .}$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ .}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\ .}$$

Exercices. Vérifier les formules de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 :

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\ .}$$

1.2.2 Développements limités

Définition 1.6. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant a. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** a s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que*

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \epsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

*Le polynôme $a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n$ s'appelle la **partie régulière** de ce développement limité.*

Exemple. Pour tout réel $x \neq 1$ on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

On en déduit le développement limité en 0

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).}$$

Définition. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant a. On dit que f admet un* ***développement limité à l'ordre n en a*** *s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que*

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \epsilon(h) \quad \textit{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n$ s'appelle la ***partie régulière*** *de ce développement limité.*

Remarques.

• Si la fonction f est $n-1$ fois dérivable sur un intervalle contenant a et a une dérivée n-ième en a, la formule de Taylor-Young nous donne un développement limité à l'ordre n, avec $a_0 = f(a)$ et $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

• Et réciproquement, on peut se demander si un développement limité est toujours donné par une formule de Taylor-Young.

Si une fonction a un développement limité à l'ordre n en a, cette fonction a-t'elle une dérivée n-ème en a ?

C'est vrai à l'ordre 1, et dans un développement limité

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

on a toujours $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

En effet :

- évaluer h en 0 donne $f(a) = a_0$.

- le taux d'accroissement de f en a donne

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = a_1 + a_2 h + \cdots + a_n h^{n-1} + o(h^{n-1})$$

et le terme de droite tend vers a_1 lorsque h tend vers 0.

Si une fonction a un développement limité à l'ordre n en a, cette fonction a-t'elle une dérivée n-ème en a ?

C'est vrai à l'ordre 1.

Mais ceci ne va plus à l'ordre 2.

Considérons la fonction $f : x \longmapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x)$ où l'on pose $f(0) = 1$.

• f a un développement limité à l'ordre 2 en 0 : $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$. En effet, on a $x^3 \sin(1/x) = x^2.x \sin(1/x)$ avec $|x \sin(1/x)| \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

• On vérifie ***(exercice !)*** d'autre part que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x) = 1 + x(2 - \cos(1/x)) + 3x^2 \sin(1/x)$$

et $f'(0) = 1$.

• f n'a donc pas de dérivée seconde en 0 car

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x) - 1}{x} = 2 - \cos(1/x) + 3x \sin(1/x)$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Notation. Si P est un polynôme, on désignera par $T_k(P)$ le *tronqué de P au degré k*, i.e. le polynôme obtenu à partir de P en ne conservant que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à k.

Par exemple
$$T_4(x - x^3/3 + 2x^5) = x - x^3/3.$$

Proposition 1.7.

1) Un développement limité, lorsqu'il existe, est unique.

2) Si f a un développement limité à l'ordre n en a, de partie régulière P, et si $k \leqslant n$, alors f a aussi un développement limité à l'ordre k, dont la partie régulière est le tronqué $T_k(P)$.

Proposition. *1) Un développement limité, lorsqu'il existe, est unique.*

Démonstration : 1) Si on a

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \epsilon(h) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + h^n \varphi(h),$$

avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, alors, pour tout k de $\{0, 1, \cdots, n\}$

$$\frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \cdots + (a_n - b_n)h^n}{h^k} = h^{n-k}(\varphi(h) - \varepsilon(h)).$$

- En donnant successivement à k les valeurs $0, 1, \cdots, n$ et

- en faisant tendre h vers 0,

cela entraîne $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$ et donc aussi $\epsilon(h) = \varphi(h)$.

Proposition. ***1) Un développement limité, lorsqu'il existe, est unique. 2) Si f a un développement limité à l'ordre n en a, de partie régulière P, et si $k \leqslant n$, alors f a aussi un développement limité à l'ordre k, dont la partie régulière est le tronqué $T_k(P)$.***

Démonstration 1) Si on a

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \epsilon(h) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + h^n \varphi(h),$$

avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, alors, pour tout k de $\{0, 1, \cdots, n\}$

$$\frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \cdots + (a_n - b_n)h^n}{h^k} = h^{n-k}(\varphi(h) - \varepsilon(h))$$

ce qui, en donnant successivement à k les valeurs $0, 1, \cdots, n$ et en faisant tendre h vers 0, entraîne $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$ et donc aussi $\epsilon(h) = \varphi(h)$.

2) Avec les mêmes notations,

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_k h^k + [a_{k+1} h^{k+1} + \cdots + a_n h^n + o(h^n))],$$

et le terme entre crochet est

$$h^k [a_{k+1} h + \cdots + a_n h^{n-k} + o(h^{n-k}))] = \underset{x\to 0}{o}(h^k)$$

□

Utile pendant les calculs :

Proposition 1.8. *La partie régulière du développement limité en* 0 *d'une fonction paire* **(resp. impaire)** *est un polynôme pair* **(resp. impair)***, c.-à-d. qu'il ne contient que des puissances paires* **(resp. impaires)** *de la variable.*

Démonstration : Si f est paire et si, en 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

alors en changeant x en $-x$ on obtient

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1 x + \cdots - a_{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

d'où par unicité du dévelopement limité, $a_1 = -a_1$, $\ldots$, $a_{2n+1} = -a_{2n+1}$ et donc

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

$\square$

Par exemple, la partie régulière du développement limité de $\sin x$ en 0 ne contient que des puissances impaires.

1.2.3 Opérations sur les développements limités

Dans tout ce paragraphe : que des développements limités en 0.

Proposition 1.9 (Somme et produit)**.** *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités **au même ordre** n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n),$$

alors $f+g$ et fg ont aussi un développement limité à l'ordre n en 0 et on a :

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n + o(x^n) \\ (fg)(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition *(Somme et produit) Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités* ***au même ordre*** *n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n),$$

alors $f+g$ et fg ont aussi un développement limité à l'ordre n en 0 et on a :

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n + o(x^n)\\ (fg)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (\sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i})x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

Démonstration : Le premier point est clair puisque $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.
Attention, il s'agit d'un abus d'écriture !

Pour le produit, on écrit $f(x) = A(x) + o(x^n)$ et $g(x) = B(x) + o(x^n)$ et on a alors

$$f(x)g(x) = A(x)B(x) + [A(x) + B(x) + o(x^n)]o(x^n)$$

et on conclut en remarquant que d'une part

$$A(x)B(x) = T_n[A(x)B(x)] + o(x^n)$$

et d'autre part

$$[A(x) + B(x) + o(x^n)]o(x^n) = o(x^n)$$

(toujours pour x tendant vers 0). $\square$

Exemples.

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5))^2 = 1-x^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{24}\right)x^4+o(x^5)\\ &= 1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^5)\end{aligned}$$

Remarques.

• Quand on fait le produit des parties régulières (ou qu'on élève au carré), il n'est pas besoin de calculer les termes dont le degré dépasse l'ordre du développement limité.

• Il est bon aussi de se souvenir d'éventuelles propriétés de parité (par exemple dans le cas d'un carré). Ici, on aurait aussi pu utiliser $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

• Il se peut que l'on gagne des ordres dans le développement limité du produit.

Par exemple, pour avoir le développement limité de $\sin^3 x$ à l'ordre 6, on peut faire

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3 = x^3\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)^3\\ &= x^3\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = x^3-\frac{x^5}{2}+o(x^6)\end{aligned}$$

• Il est quelquefois utile, comme ici, de mettre des puissances de x en facteur, en se souvenant que $o(x^{d+e}) = x^d o(x^e)$ (toujours quand x tend vers 0, bien sûr).

Conséquence de la proposition.
La partie régulière du développement limité de la partie paire d'une fonction f (définie comme $(f(x)+f(-x))/2$) est la partie paire de la partie régulière du développement limité de $f(x)$.
De même pour la partie impaire.

Exemple.
En partant de e^x, ceci nous donne

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cosh x & = & 1+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}) \\ \\ \sinh x & = & x+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}) \end{array}}$$

Proposition 1.10 (Substitution)**.** *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités* ***au même ordre*** *n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n),$$

et si g(0)=0 *alors $f(g(x))$ a un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière s'obtient en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans*

$$a_0 + a_1(b_1 x + \cdots + b_n x^n) + \cdots + a_n(b_1 x + \cdots + b_n x^n)^n.$$

Autrement dit, si $A(x)$ est la partie régulière du développement limité de $f(x)$ et $B(x)$ (avec $B(0) = 0$) celle de $g(x)$, alors la partie régulière du développement limité de $f(g(x))$ est le tronqué $T_n(A(B(x)))$.

Proposition (Substitution) *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités* ***au même ordre*** *n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n),$$

et si g(0)=0 *alors $f(g(x))$ a un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière s'obtient en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans*

$$a_0 + a_1(b_1 x + \cdots + b_n x^n) + \cdots + a_n(b_1 x + \cdots + b_n x^n)^n.$$

Autrement dit, si $A(x)$ est la partie régulière du développement limité de $f(x)$ et $B(x)$ ($B(0) = 0$) celle de $g(x)$, alors la partie régulière du développement limité de $f(g(x))$ est le tronqué $T_n(A(B(x)))$.

Démonstration : Comme $B(0) = 0$, on peut écrire $B(x) = xB_1(x)$ où B_1 est un polynôme.

Mais alors

$$\underset{x\to 0}{o}(g(x)^n) = g(x)^n \epsilon\big(g(x)\big) = x^n.[B_1(x) + \underset{x\to 0}{o}(1)]^n \epsilon\big(g(x)\big)$$

avec $\lim_{X\to 0} \epsilon(X) = 0$ et donc $\underset{x\to 0}{o}(g(x)^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

Par ailleurs, pour tout $k \leqslant n$, on a

$$g(x)^k = (B(x) + o(x^n))^k = B(x)^k + o(x^n).$$

Donc

$$f(g(x)) = A(B(x) + o(x^n)) + o(g(x)^n) = A(B(x)) + o(x^n) = T_n(A(B(x))) + o(x^n).$$

$\square$

Il faut bien prendre garde à la condition $g(0) = 0$ quand on substitue !

Par exemple, pour calculer le développement limité de $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3, si on écrit

$$e^{\cos x} = 1 + (1 - x^2/2) + \frac{(1 - x^2/2)^2}{2!} + \frac{(1 - x^2/2)^3}{3!} + o(x^3) = \frac{8}{3} - \frac{5}{4}x^2 + o(x^3),$$

On a tout faux !

En effet, $\cos 0 = 1 \neq 0$. Le calcul correct est

$$e^{\cos x} = e\left(e^{\cos x - 1}\right) = e(1 + (-x^2/2) + o(x^3)) = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3).$$

Remarques.

• On constate ici que l'on gagne même en précision : on a déjà le développement limité à l'ordre 3 en substituant $\cos x - 1$ dans le développement limité à l'ordre 1 de e^x. Ceci vient du fait que $\cos x - 1 = O(x^2)$ quand $x \to 0$.

• Dans le même ordre d'idée, la partie régulière du développement limité de $f(x^2)$ à l'ordre $2n + 1$ en 0 s'obtient en substituant x^2 à x dans la partie régulière du développement limité de $f(x)$ à l'ordre n.

Proposition 1.11 (Quotient)**.** *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités* ***au même ordre*** *n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n),$$

et si g(0)≠0 *alors f/g a aussi un développement limité à l'ordre n.*

Démonstration : Sous ces hypothèses, il suffit d'écrire

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{b_0}\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{b_1}{b_0}x + \cdots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)\right)}$$

puis d'utiliser le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1+X}$ et les propositions précédentes.

$\square$

Exemple. Calcul du développement limité à l'origine de $\tan x$ à l'ordre 6. On se souvient que tan est impaire (il y aura des termes en x, x^3 et x^5 uniquement).

Exemple. *(suite)* On écrit $\tan x = \sin x . \dfrac{1}{\cos x}$ avec $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)$ et $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$.

On a alors $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)}$.

On part alors du développement de $\dfrac{1}{1-X}$ en 0 à l'ordre 2

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^2 \varepsilon(X)$$

et on applique le théorème de substitution :

$$\frac{1}{\cos x} = T_4\left(1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^2\right) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

Par parité, ce développement est aussi un développement à l'ordre 5. Enfin, on utilise le théorème sur le produit pour obtenir

$$\tan x = T_5\left((x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24})\right) + o(x^5).$$

On obtient finalement la formule (qu'il n'est pas mauvais de connaître par coeur)

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)}$$

Proposition 1.12 (Intégration)**.** *Si f a un développement limité à l'ordre n en* 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

et si F est une primitive de f définie sur un intervalle ouvert contenant 0 *($F' = f$), alors $F(x)$ a un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0, qui est*

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité à l'ordre $n+1$ d'une primitive est une primitive de la partie régulière du développement limité à l'ordre n.

Proposition (Intégration)*Si f a un développement limité à l'ordre n en* 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

et si F est une primitive de f définie sur un intervalle ouvert contenant 0 *($F' = f$), alors $F(x)$ a un développement limité à l'ordre $n+1$ en* 0*, qui est*

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration : Posons

$$B(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

et $G(x) = F(x) - B(x)$. Alors G est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0,

$$G'(x) = f(x) - (a_0 + \cdots + a_n x^n) = o(x^n) = x^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$, et $G(0) = 0$.

Donc, d'après le théorème des accroissement finis, $G(x) = xG'(\theta x)$ avec θ dépendant de x, $0 < \theta < 1$. Ainsi

$$G(x) = x(\theta x)^n \epsilon(\theta x) = x^{n+1}\theta^n \epsilon(\theta x) = o(x^{n+1}),$$

car $\lim_{x\to 0} \theta^n \epsilon(\theta x) = 0$. Au total,

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

□

Exemples. • Ainsi, de $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ on obtient par intégration

$$\boxed{\ell n\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).}$$

• De $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$ on tire par intégration

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).}$$

Exercice. Calculer le développement limité à l'ordre 5 de arcsin en 0.

Corollaire 1.13 (Dérivation). *Si f a un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$ en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

si f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 et si sa dérivée f' a un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0, celui-ci est :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Remarque

On est obligé dans l'énoncé de mettre comme hypothèse l'existence du développement limité de f' à l'ordre $n-1$.

Ceci ne vient pas automatiquement !

• Considérons l'exemple donné plus haut d'une fonction qui a un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais qui n'est pas deux fois dérivable.

• Sa dérivée n'a pas de dérivée en 0, ce qui veut dire qu'elle n'a pas de développement limité d'ordre 1.

Corollaire (Dérivation) *Si f a un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$ en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

si f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 et si sa dérivée f' a un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0, celui-ci est :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Démonstration : On écrit le développement limité

$$f'(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1}),$$

et on utilise la proposition précédente qui nous donne

$$f(x) = f(0) + b_0 x + \frac{b_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n} x^n + o(x^n),$$

et on identifie pour conclure avec $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$. $\square$

1.2.4 Utilisation des développements limités

Les développements limités servent :
- à calculer des limites,
- à l'étude des courbes.

Pour les calculs, on se ramène ***toujours*** à écrire des développements limités en 0.

Les développements limités servent :

• à calculer des limites,

• à l'étude des courbes.

Pour les calculs, on se ramène ***toujours*** à écrire des développements limités en 0.

• Quand on est au voisinage de a, on fait le changement de variable $x = a + h$ et on écrit des développements limités en 0 pour la variable h.

Par exemple, pour obtenir le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$ à l'ordre 2, on écrit

$$\begin{aligned}\tan(\frac{\pi}{4}+h) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan h}{1-\tan\frac{\pi}{4}\,\tan h} = \frac{1+\tan h}{1-\tan h} = \frac{1+h+\underset{h\to 0}{o}(h^2)}{1-h+\underset{h\to 0}{o}(h^2)}\\ &= (1+h+\underset{h\to 0}{o}(h^2))(1+h+h^2+\underset{h\to 0}{o}(h^2)) = 1+2h+2h^2+\underset{h\to 0}{o}(h^2),\end{aligned}$$

On peut aussi écrire $\tan x = 1 + 2(x-\frac{\pi}{4}) + 2(x-\frac{\pi}{4})^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{o}\left((x-\frac{\pi}{4})^2\right).$

Les développements limités servent :
- à calculer des limites,
- à l'étude des courbes.

Pour les calculs, on se ramène ***toujours*** à écrire des développements limités en 0.
- Quand on est au voisinage de a, on fait le changement de variable $x = a + h$ et on écrit des développements limités en 0 pour la variable h.

Par exemple, pour obtenir le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$ à l'ordre 2, on écrit

$$\begin{aligned}
\tan(\frac{\pi}{4}+h) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan h}{1-\tan\frac{\pi}{4}\,\tan h} = \frac{1+\tan h}{1-\tan h} = \frac{1+h+\underset{h\to 0}{o}(h^2)}{1-h+\underset{h\to 0}{o}(h^2)} \\
&= (1+h+\underset{h\to 0}{o}(h^2))(1+h+h^2+\underset{h\to 0}{o}(h^2)) = 1+2h+2h^2+\underset{h\to 0}{o}(h^2),
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire $\tan x = 1 + 2(x-\frac{\pi}{4}) + 2(x-\frac{\pi}{4})^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{o}\left((x-\frac{\pi}{4})^2\right).$

- Au voisinage de l'infini, on utilise le changement de variable $x = 1/t$, et on écrit des développements limités en 0 pour la variable t.

Étudions par exemple la branche infinie pour x tendant vers $-\infty$ de la courbe d'équation

$$y = \sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2-x-1}.$$

Étudions par exemple la branche infinie pour x tendant vers $-\infty$ de la courbe d'équation

$$y = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}.$$

Pour $x < -1$, on a (attention aux signes !)

$$y = x\,\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}.$$

On pose $t = 1/x$, et on écrit le développement limité de

$$f(t) = \sqrt[3]{1 + t^2 + t^3} + \sqrt{1 - t - t^2}$$

à l'ordre 2 en 0. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1 + t^2 + t^3} &= 1 + \frac{1}{3}(t^2 + t^3) + o(t^2) = 1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2) \\
\sqrt{1 - t - t^2} &= 1 + \frac{1}{2}(-t - t^2) - \frac{1}{8}(-t - t^2)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t}{2} - \frac{5t^2}{8} + o(t^2) \\
f(t) &= 2 - \frac{t}{2} - \frac{7t^2}{24} + o(t^2)
\end{aligned}$$

et donc, en $-\infty$,

$$y = x\left(2 - \frac{1}{2x} - \frac{7}{24x^2} + \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x - \frac{1}{2} - \frac{7}{24x} + \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y = 2x - 1/2$ est asymptote, et la courbe est au dessus de l'asymptote car $-7/(24x) + \underset{x\to-\infty}{o}(1/x) > 0$ quand x est « proche de $-\infty$ ».

Les règles de calcul sur les développements limités sont ***mécaniques***, et on peut les programmer : les systèmes de calcul formel permettent de calculer des développements limités sans effort !

Par exemple, demandons au logiciel MAPLE le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$

```
> taylor(tan(x),x=Pi/4,5);

                                           2                   3                     4
 1 + 2 (x - 1/4 Pi) + 2 (x - 1/4 Pi)  + 8/3 (x - 1/4 Pi)  + 10/3 (x - 1/4 Pi)

                             5
      + O((x - 1/4 Pi) )
```

Remarque. Ce qui est obtenu ici est un développement limité à l'ordre 4, et que le reste est présenté sous forme d'un O et pas d'un o : quand $x \to \frac{\pi}{4}$, un $O((x - \frac{\pi}{4})^5)$ est un $o((x - \frac{\pi}{4})^4)$, mais la réciproque n'est pas vraie.

Attention !

• Quand on fait les calculs à la main, il y a des pièges classiques dans lesquels il vaut mieux ne pas tomber.

• On a signalé plus haut une erreur à éviter dans le cas de substitutions.

• Un point important à garder à l'esprit est : *à quel ordre sont les développements limités* ?

Il faut ***toujours écrire les restes***, pour garder l'ordre en mémoire. Par exemple une écriture du genre

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

est absolument à proscrire. Elle conduit inévitablement à des calculs comme

$$\sin^2 x \approx x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}$$

qui font croire que l'on a ainsi le développement limité de $\sin^2 x$ à l'ordre 6 (que vaut-il en réalité ?).