UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Éléments de correction du test du 3/12/21

Questions de cours : voir le cours.

QCM

1. La série $\sum u_n$ converge, mais pas absolument :
   (a) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$
   Faux : $u_n \geq 0$, donc si la série converge, elle converge absolument aussi.
   C'est effectivement le cas puisque $n^{3/2}|u_n|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (par croissances comparées), d'où la convergence par la règle de Riemann.
   (b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
   Vrai, c'est une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, par contre en valeur absolue on trouve la série harmonique qui diverge.
   (c) $u_n = \frac{\cos n}{n^3}$
   Faux, elle converge absolument par comparaison avec une série de Riemann convergente : $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^3}$.
   (d) $u_n = \frac{\sin n}{n}$
   Vrai d'après le cours.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Alors :
   (a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0,1]$.
   Faux : on a $u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$, donc la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.
   (b) $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0,2]$.
   Vrai, on a $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f(\frac{k}{n})$ donc v_n est une somme de Riemann pour f sur $[0,2]$ associée à la subdivision $\{1/n, 2/n, \ldots, (2n-1)/n, 2\}$.
   (c) La limite de $w_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n^2}{4n^2+k^2}$ est $\frac{\pi}{8}$.
   Faux : on a $w_n \geq \sum_{k=1}^{2n} \frac{n^2}{4n^2+4n^2} = \frac{n}{4}$, et donc w_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive intégrable :
   (a) Alors $\int_a^b f$ est positive.
   Vrai, c'est la positivité de l'intégrale (voir le cours).
   (b) Si $\int_a^b f = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a,b]$.
   Faux, par exemple si f prend la valeur 1 en 0 et est nulle sur $]0,1]$. Le résultat est vrai par contre si on suppose de plus f continue.
   (c) La fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est dérivable.
   Faux en général, un contre-exemple a été vu en cours.
   (d) La fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est monotone.
   Vrai. Si on appelle F cette fonction, on a $F(x) - F(y) = \int_y^x f$ qui est positif si $y \leq x$ par positivité de l'intégrale.

4. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_{3x}^{x^2} \ln(2+\sin t)dt$:
   (a) est dérivable de dérivée donnée par $F'(x) = \ln(2+\sin x^2) - \ln(2+\sin(3x))$.
   Faux, la valeur de $F'(0)$ est $-3\ln 2$ d'après 4(b), et non 0.
   (b) est dérivable de dérivée donnée par $F'(x) = 2x\ln(2+\sin x^2) - 3\ln(2+\sin(3x))$.
   Vrai. Déjà la fonction proposée est dérivable par composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à savoir les fonctions $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto x^2$, ainsi que $x \mapsto \int_a^x \ln(2+\sin t)dt$ par continuité de la fonction $t \mapsto \ln(2+\sin t)$. Il reste à utiliser la formule de dérivation des fonctions composées : si f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors $f \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivé $(f \circ g)'(t) = g'(t)f'(g(t))$.
   (c) est dérivable de dérivée donnée par $F'(x) = \int_3^{2x} \frac{\cos t}{2+\sin t}dt$.
   Faux, la valeur de $F'(0)$ est $-3\ln 2$ d'après 4(b), et non 0.
   (d) n'est pas dérivable.
   Faux, voir 4(b).

5. L'intégrale généralisée converge :
   (a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.
   Vrai d'après le cours, c'est une intégrale de Riemann convergente. Plus précisément la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus une primitive est donnée par $t \mapsto \frac{-1}{t}$ qui admet une limite finie en $+\infty$.
   (b) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.
   Faux d'après le cours, c'est une intégrale de Riemann divergente.
   (c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
   Vrai d'après le cours, c'est une intégrale de Riemann convergente.
   (d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.
   Faux, une primitive est par exemple $t \mapsto \ln\ln t$ qui tend vers l'infini en $+\infty$.