UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test du 3/12/21 (Durée : 40 min)

NOM Prénom :

Questions de cours (4 points)

1. Énoncer le théorème d'équivalence pour les intégrales généralisées.

2. Donner la définition d'un espace probabilisé fini.

QCM : dans chacun des cas ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes.

Barème : 2 point par affirmation exacte entourée, -1 point par affirmation fausse entourée, 0 point en l'absence de réponse.

---

1. La série $\sum u_n$ converge, mais pas absolument :

   (a) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$

   (b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

   (c) $u_n = \frac{\cos n}{n^3}$

   (d) $u_n = \frac{\sin n}{n}$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Alors :

   (a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0,1]$.

   (b) $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0,2]$.

   (c) La limite de $w_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n^2}{4n^2+k^2}$ est $\frac{\pi}{8}$.

3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive intégrable :

   (a) Alors $\int_a^b f$ est positive.

   (b) Si $\int_a^b f = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

   (c) La fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est dérivable.

   (d) La fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est monotone.

4. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_{3x}^{x^2} \ln(2+\sin t)dt$:

   (a) est dérivable de dérivée donnée par $F'(x) = \ln(2+\sin x^2) - \ln(2+\sin(3x))$.

   (b) est dérivable de dérivée donnée par $F'(x) = 2x\ln(2+\sin x^2) - 3\ln(2+\sin(3x))$.

   (c) est dérivable de dérivée donnée par $F'(x) = \int_3^{2x} \frac{\cos t}{2+\sin t}dt$.

   (d) n'est pas dérivable.

5. L'intégrale généralisée converge :

   (a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

   (b) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

   (c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

   (d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.