UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test du 28/11/22 (Durée : 40 min)

NOM Prénom :

Questions de cours (4 points)

1. Donner la définition d'une intégrale généralisée convergente.

2. Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.

QCM : dans chacun des cas ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes.

Barème : 2 points par affirmation exacte entourée, -1 point par affirmation fausse entourée, 0 point en l'absence de réponse.

---

1. La série $\sum u_n$ converge absolument :

   (a) $u_n = \dfrac{1}{n}$

   (b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

   (c) $u_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n^3}}$

   (d) $u_n = \dfrac{\sin n}{1+e^n}$

2. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, et soient a et b des réels. Posons

$$R_n = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \cdots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Alors R_n est :

(a) égal à $\displaystyle\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt$.

(b) égal à $\displaystyle\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n)}(t)(t-a)^n\,dt$.

(c) un $o(\frac{1}{n})$ quand n tend vers l'infini.

3. L'intégrale est égale à 2 dans les cas suivants :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$.

(b) $\displaystyle\int_0^4 \cos^2(\pi t)\,dt$.

(c) $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{dt}{t}$.

(d) $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{dt}{t^2}$.

4. La fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \frac{\ln t}{2+\cos t} dt$:

(a) est dérivable de dérivée donnée par $F'(x) = \frac{\ln 2x}{2+\cos(2x)}$.

(b) est dérivable de dérivée donnée par $F'(x) = \frac{2\ln 2x}{2+\cos(2x)}$.

(c) est dérivable de dérivée donnée par $F'(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \frac{1}{-t\sin t} dt$.

(d) n'est pas dérivable.

5. L'intégrale généralisée converge :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$.

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.