Analyse et Probabilités 3

Corrigé du test du 22/10/21

Questions de cours (4 points)

1. Théorème de Heine : une fonction à valeurs réelles continue sur un segment y est uniformément continue.
2. On considère une fonction f à valeurs réelles définie sur un segment $[a,b]$. Soit $X = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. Définir les sommes de Darboux de f associées à la subdivision X.

   On doit supposer en plus que f est bornée (c'est un oubli de l'énoncé). Avec cette hypothèse, la borne inférieure m_i de f sur $[a_{i-1}, a_i]$ est bien définie pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, et la somme de Darboux inférieure de f associée à la subdivision X est
   $$\sum_{i=1}^{n} m_i(a_i - a_{i-1}).$$
   De même la borne supérieure M_i de f sur $[a_{i-1}, a_i]$ est bien définie pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, et la somme de Darboux supérieure de f associée à la subdivision X est
   $$\sum_{i=1}^{n} M_i(a_i - a_{i-1}).$$

QCM : dans chacun des cas ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes.

1. On a le développement limité suivant au voisinage de 0 :

   (a) $\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + o(x^2)$.
   Vrai d'après la formule du cours pour $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = 1/5$.

   (b) $e^{\sin x} = 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
   Faux : $\sin x = x + o(x^2)$ donc par composition de développements limités à l'ordre 2, et puisque $\sin 0 = 0$, on a $e^{\sin x} = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$. Ainsi le coefficient de x^2 dans le développement limité à l'ordre 3 de $e^{\sin x}$ ne peut être nul.

   (c) $\ln(1 + \cos x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.
   Faux, le terme constant devrait être $\ln 2$.

   (d) $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.
   Vrai : $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ et on peut alors composer avec $X \mapsto \frac{1}{1-X}$ au voisinage de 0.

2. On a le résultat suivant :

   (a) $\frac{\cos n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
   Faux, le quotient de $\frac{\cos n}{n}$ par $\frac{1}{n}$ est égal à $\cos n$ qui ne tend pas vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

   (b) $\frac{\cos n}{n} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Vrai par contre, car $\cos n$ est borné (au voisinage de $+\infty$).

   (c) $\frac{\cos n}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(\cos n)$.
   Vrai car le quotient de $\frac{\cos n}{n}$ par $\cos n$, donc $\frac{1}{n}$, tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. La série $\sum u_n$ converge dans les cas suivants :

   (a) $u_n = \frac{\ln n}{n^3}$
   Vrai : $n^2 u_n$ tend vers 0 quand n tends vers l'infini, d'où la convergence par la règle de Riemann (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive).

   (b) $u_n = \frac{1}{\ln n}$
   Faux : $u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$, d'où la divergence par comparaison avec la série harmonique.

   (c) $u_n = e^n$
   Faux, il y a même divergence grossière.

   (d) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
   Vrai par le critère spécial des séries alternées : $(-1)^n u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est positif, et tend vers 0 en décroissant car $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$ en croissant (quand n tend vers $+\infty$).

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

   (a) Les séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ sont de même nature.
   Faux, voir par exemple 3(d). En effet la série $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente.

   (b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$, alors $\sum u_n$ converge.
   Faux, par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln n}$. En effet le quotient de u_n par $\frac{(-1)^n}{n}$ est $1+\frac{(-1)^n}{\ln n}$ qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, d'où l'équivalence. Mais la série de terme général $\frac{1}{n\ln n}$ est divergente (série de Bertrand), donc aussi $\sum u_n$ car $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

   (c) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2}$, alors $\sum u_n$ converge.
   Vrai : on a alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, d'où la convergence absolue de $\sum_n u_n$ par équivalence (les termes sont positifs et $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente), donc la convergence.

   (d) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   Faux : voir la série harmonique.

5. La somme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ vaut 1 dans les cas suivants :

   (a) $u_n = \cos n$.
   Faux, la série diverge grossièrement.

   (b) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
   Vrai : $\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

   (c) $u_n = \frac{1}{3^n}$.
   Faux : la série est géométrique de raison $1/3$ donc converge, et $\sum_{n\geq 1} u_n = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0} u_n = \frac{1}{3}\frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2}$.