UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test du 22/10/21 (Durée : 40 min)

NOM Prénom :

Questions de cours (4 points)

1. Énoncer le théorème de Heine.

2. On considère une fonction f à valeurs réelles définie sur un segment $[a, b]$. Soit $X = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. Définir les sommes de Darboux de f associées à la subdivision X.

QCM : dans chacun des cas ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes.

Barème : 2 point par affirmation exacte entourée, -1 point par affirmation fausse entourée, 0 point en l'absence de réponse.

---

1. On a le développement limité suivant au voisinage de 0 :

   (a) $\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + o(x^2)$.

   (b) $e^{\sin x} = 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

   (c) $\ln(1 + \cos x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

   (d) $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

2. On a le résultat suivant :

   (a) $\frac{\cos n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

   (b) $\frac{\cos n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.

   (c) $\frac{\cos n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(\cos n)$.

3. La série $\sum u_n$ converge dans les cas suivants :

   (a) $u_n = \frac{\ln n}{n^3}$

   (b) $u_n = \frac{1}{\ln n}$

   (c) $u_n = e^n$

   (d) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

   (a) Les séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ sont de même nature.

   (b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$, alors $\sum u_n$ converge.

   (c) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2}$, alors $\sum u_n$ converge.

   (d) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

5. La somme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ vaut 1 dans les cas suivants :

   (a) $u_n = \cos n$.

   (b) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

   (c) $u_n = \frac{1}{3^n}$.