Analyse et Probabilités 3

Test du 22/11/23 (Durée : 40 min)

NOM Prénom :

QCM : dans chacun des cas ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes.

Barème : 2 points par affirmation exacte entourée, -1 point par affirmation fausse entourée, 0 point en l'absence de réponse.

---

1. On a le développement limité suivant au voisinage de 0 :

   (a) $e^{1+x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$.

   (b) $\sqrt[3]{1+x^2} = 1 + x^2/3 + o(x^3)$.

   (c) $\dfrac{1}{\ln(1+x)} = -x + x^2/2 + o(x^2)$.

2. La série $\sum u_n$ converge dans les cas suivants :

   (a) $u_n = \cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

   (b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

   (c) $u_n = \dfrac{n^2+1}{n^5+2}$

3. La série $\sum u_n$ converge absolument dans les cas suivants :

   (a) $u_n = -\dfrac{1}{n^2}$

   (b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

   (c) $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$

4. Les fonctions suivantes sont uniformément continues

   (a) La fonction partie entière sur $\mathbb{R}$.

   (b) $x \mapsto x^4$ sur $]0, +\infty[$.

   (c) La fonction $x \mapsto e^x + \cos(x^2)$ sur $[0, 1]$.

5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, avec $a > 0$. On est certain que f est intégrable sur le segment $[a, b]$ dans les cas suivants :

   (a) La fonction f est uniformément continue.

   (b) La fonction f est décroissante.

   (c) La fonction $|f|$ est majorée par la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

6. Les sommes suivantes sont des sommes de Riemann d'une certaine fonction intégrable sur un certain segment :

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$.

7. L'intégrale est égale à 1 dans les cas suivants :

   (a) $\displaystyle\frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{x}dx$.

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin^3 x dx$.

   (c) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$.