Analyse et Probabilités 3

Éléments de correction du test du 24/09/21 (Durée : 40 min)

Question de cours (2 points)

On dit que f est dominée par g au voisinage de a lorsqu'il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout x dans un voisinage de a, on ait

$$|f(x)| \leq K|g(x)|.$$

QCM : dans chacun des six cas ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes.

---

1. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f, g, h des fonctions définies au voisinage de a.

   (a) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$.
   Faux, par exemple avec $f(x) = g(x) = x$.

   (b) Si $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$
   Faux, par exemple avec $f(x) = g(x) = x^2$ et $h(x) = x$.

   (c) Si $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$.
   Vrai. On peut écrire $f(x) = g(x)\phi(x)$ et $g(x) = h(x)\psi(x)$ avec la limite de ϕ qui vaut 0 en a et celle de ψ qui vaut 1 en a. Alors $f(x) = h(x)\phi(x)\psi(x)$ avec le limite de $\phi(x)\psi(x)$ qui vaut 0 en a par produit de limites finies.

2. On a le résultat suivant :

   (a) $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
   Faux, la limite de $\frac{e^x - 1}{x}$ vaut 1 en 0, donc celle de $\frac{e^x - 1}{x^2}$ vaut $+\infty$.

   (b) $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
   Vrai, la limite de $\frac{e^x - 1}{x}$ vaut 1 en 0.

   (c) $e^x = 1 + \underset{x \to 0}{o}(x)$.
   Faux, $e^x - 1 = x\phi(x)$ avec la limite de $\phi(x)$ valant 1 en 0, donc la limite de ϕ n'est pas nulle en 0.

   (d) $e^x = 1 + \underset{x \to 0}{O}(x)$.
   Vrai. Avec les notations de la question précédente, la fonction ϕ est majorée par 2 (par exemple) au voisinage de 0 car elle tend vers 1 en 0.

3. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = -1 + 2x + x^2 - x^3 + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en 0. On est alors certain que :

   (a) $f'(x) = 2 + 2x + x^3\epsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon_1(x) = 0$.
   Faux. On n'est pas certain que f' admette un développement limité, dans le théorème du cours on doit ajouter cette hypothèse.

(b) $F(x) = 1 - x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$.
Vrai d'après le théorème du cours : le développement limité d'une primitive existe, à un ordre 1 de plus que celui de la fonction de départ.

(c) La dérivée seconde de F en 0 vaut 2.
Vrai. F est une primitive de f donc $F' = f$, et f est dérivable car admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 (pourquoi ?) avec $f'(0)$ qui est égal au coefficient devant x dans son développement limité en 0. Donc $F''(0) = f'(0) = 2$.

4. On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = x - 2x^2 + x^3 + x^3\epsilon_1(x)$ et $g(x) = 1 + 2x + x^3 + x^3\epsilon_2(x)$. On est certain que :

(a) La fonction $f + g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 4.
Faux, le théorème sur les sommes de développements limités assure juste l'existence d'un développement limité à l'ordre 3.

(b) La fonction fg admet un développement limité en 0 à l'ordre 3.
Vrai, d'après le théorème sur les produits de développements limités.

(c) La fonction $g \circ f$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 3.
Vrai, d'après le théorème sur les compositions de développements limités : $f(0) = 0$ et on connait le développement limité de g en 0, dont on obtient le développement limité de la composée $g \circ f$ au même ordre que ceux de f et de g, donc 3.

(d) La fonction $\frac{g}{f}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 2.
Faux, la fonction $\frac{g}{f}$ n'admet même pas de limite finie en 0.
Notez que l'hypothèse du théorème sur le quotient de développements limités n'est pas satisfaite car $f(0) = 0$.

5. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$

(a) $1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.
Faux.

(b) $1 + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.
Vrai. On a $\cos x = 1 - x^2/2 + x^2\epsilon(x)$ avec la limite de ϵ_1 en 0 qui vaut 0. Or
$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + X^2\epsilon_2(X)$$
avec la limite de ϵ_2 en 0 qui vaut 0, d'où
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 + (-x^2/2 + x^2\epsilon_1(x))} = 1 - (-x^2/2) + x^2\epsilon_3(x)$$
avec la limite de ϵ_3 en 0 qui vaut 0.

(c) Aucun des deux résultats précédents.
Faux

6. La limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{\ln(1+2x^2)}{1-\cos x}$ est 4.
En effet $\ln(1 + 2x^2) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$ et $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} x^2/2$ donc par quotient d'équivalents
$$\frac{\ln(1 + 2x^2)}{1 - \cos x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x^2}{x^2/2} = 4.$$
On en déduit le résultat.