

Analyse et Probabilités 3**Test du 24/09/21 (Durée : 40 min)**NOM Prénom :

Question de cours (2 points)On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle ouvert I . Soit $a \in I$.Donner la définition de f est dominée par g au voisinage de a (que l'on note $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$).

QCM : dans chacun des six cas ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes.**Barème** : 2 point par affirmation exacte entourée, -1 point par affirmation fautive entourée, 0 point en l'absence de réponse.

1. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f, g, h des fonctions définies au voisinage de a .

(a) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$.

(b) Si $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$

(c) Si $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(h(x))$.

2. On a le résultat suivant :

(a) $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

(b) $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

(c) $e^x = 1 + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x)$.

(d) $e^x = 1 + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x)$.

3. Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} telle que $f(x) = -1 + 2x + x^2 - x^3 + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$. Soit F la primitive de f sur \mathbb{R} qui prend la valeur 1 en 0. On est alors certain que :

(a) $f'(x) = 2 + 2x + x^3\epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = 0$.

(b) $F(x) = 1 - x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0$.

(c) La dérivée seconde de F en 0 vaut 2.

4. On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = x - 2x^2 + x^3 + x^3\epsilon_1(x)$ et $g(x) = 1 + 2x + x^3 + x^3\epsilon_2(x)$. On est certain que :

(a) La fonction $f + g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 4.

(b) La fonction fg admet un développement limité en 0 à l'ordre 3.

(c) La fonction $g \circ f$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 3.

(d) La fonction $\frac{g}{f}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 2.

5. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$

(a) $1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

(b) $1 + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

(c) Aucun des deux résultats précédents.

6. La limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{\ln(1+2x^2)}{1-\cos x}$ est

(a) $-\infty$

(b) 0

(c) 2

(d) 4