

Analyse et Probabilités 3

Test du 27/09/22 (Durée : 30 min)

NOM Prénom :

Question de cours (2 points)

Énoncer la proposition sur le développement limité d'un produit de deux fonctions.

QCM : dans chacun des six cas ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes.**Barème** : 2 points par affirmation exacte entourée, -1 point par affirmation fausse entourée, 0 point en l'absence de réponse.

1. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f, g, h des fonctions définies au voisinage de a .

(a) Si $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

(b) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$.

(c) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $g(x) = O_{x \rightarrow a}(h(x))$, alors $f(x) = O_{x \rightarrow a}(h(x))$.

2. On a le résultat suivant :

(a) $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 + x^3$.

(b) $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 + x^3$.

(c) $x^2 + x^3 = O_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

(d) $x^2 + x^3 = O_{x \rightarrow +\infty}(x^2)$.

3. Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} telle que $f(x) = x + x^3 + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$. Soit F la primitive de f sur \mathbb{R} qui prend la valeur 1 en 0. On est alors certain que :

(a) $f(x) = x + x^2\epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = 0$.

(b) $f'(0) = 0$

(c) $F(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0$.

4. On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = 1 + x - x^2 + x^2\epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = 0$ et $g(x) = -2x + x^2 + x^2\epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0$. On est certain que :

(a) La fonction $f + g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 2.

(b) La fonction fg admet un développement limité en 0 à l'ordre 3.

(c) La fonction $g \circ f$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 2.

(d) La fonction $\frac{g}{f}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 1.

5. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\cos x}$ est

(a) $1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

(b) $1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

(c) $x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

(d) $x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

6. La limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{\ln(1+x^3)}{(1-\cos x)\sin x}$ est

(a) $-\infty$

(b) 0

(c) 2

(d) Aucun des résultats précédents.