Analyse et Probabilités 3

Test du 26/09/22 (Durée : 40 min)

NOM Prénom :

Question de cours (2 points)
On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
Donner la définition de "f est équivalente à g au voisinage de a" (que l'on note $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$).

QCM : dans chacun des six cas ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes.

Barème : 2 points par affirmation exacte entourée, -1 point par affirmation fausse entourée, 0 point en l'absence de réponse.

---

1. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f, g, h des fonctions définies au voisinage de a.

   (a) Si $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$, alors $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$.

   (b) Si $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$, alors $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$.

   (c) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$, alors $f(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$.

2. On a le résultat suivant :

   (a) $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x + x^2$.

   (b) $\sin x - x \underset{x \to 0}{\sim} x^2$.

   (c) $\dfrac{\sin x}{x} = 1 + \underset{x \to 0}{o}(x)$.

   (d) $\sin^2 x = \underset{x \to 0}{o}(x^2)$.

3. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 - x^2 + x^3\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0. On est alors certain que :

   (a) $f'(x) = -2x + x^2\epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$.

   (b) $F(x) = x + x^2\epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$.

   (c) La dérivée troisième de F en 0 est nulle.

4. On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = 2 + x + x^2 + x^3\epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$ et $g(x) = -x - x^2 + x^3 + x^3\epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$. On est certain que :

   (a) La fonction $f + g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 2.

   (b) La fonction fg admet un développement limité en 0 à l'ordre 4.

   (c) La fonction $g \circ f$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 3.

   (d) La fonction $\frac{g}{f}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 3.

5. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+\ln(1+x)}$ est

   (a) $1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

   (b) $1 - x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

   (c) Aucun des deux résultats précédents.

6. La limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{3x(x-\sin x)}{(1+x-e^x)^2}$ est

   (a) $-\infty$

   (b) 0

   (c) 2

   (d) 4