Université de Rennes

Analyse et Probabilités 3

Test du 25/09/24 (Durée : 30 min)

NOM Prénom :

Question de cours (2 points)
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, et soit $a \in I$.
À quelle condition dit-on que f est équivalente à g au voisinage de a ?

QCM : dans chacun des cinq cas ci-dessous, entourer la ou les affirmations exactes.

Barème : 2 points par affirmation exacte entourée, -1 point par affirmation fausse entourée, 0 point en l'absence de réponse.

---

1. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f, g, h des fonctions définies au voisinage de a.

   (a) Si $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

   (b) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$.

   (c) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, alors $g(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$.

   (d) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$, alors $f(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$.

2. On a le résultat suivant :

   (a) $\ln(1 + x^2) \underset{x \to 0}{\sim} \ln(1 + x)$.

   (b) $\ln(1 + x^2) \underset{x \to 0}{\sim} x^2$.

   (c) $\ln(1 + x^2) \underset{x \to 0}{\sim} x^2 + x^4$.

   (d) $\ln(1 + x^2) = \underset{x \to 0}{o}(x^2)$.

3. On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = 2x + x^3 + x^3\epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$ et $g(x) = 1 - x + x^2\epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$. On est certain que :

   (a) La fonction $f + g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 3.

   (b) La fonction fg admet un développement limité en 0 à l'ordre 3.

   (c) La fonction $g \circ f$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 2.

   (d) La fonction $\dfrac{g}{f}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 2.

4. La fonction suivante admet $1 + \frac{x}{2} + x\epsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$, comme développement limité à l'ordre 1 en 0.

   (a) $x \mapsto \sqrt{1 + \sin x}$

   (b) $x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$

   (c) $x \mapsto \dfrac{e^x}{2}$

   (d) $x \mapsto \cos(x/2)$

5. La limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{x^3 e^x}{(1-\cos x)\tan x}$ est

   (a) -2

   (b) 0

   (c) 2

   (d) Aucun des résultats précédents.