Analyse et Probabilités 3

Contrôle du 16/12/21 (Durée : 2h)

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le contrôle est constitué de questions de cours et de trois exercices (plus un en bonus). Les exercices sont indépendants les uns des autres. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Un barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours (*4 points*)

1. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Donner la définition de la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)dt$.
2. Énoncer la nature des intégrales de Riemann généralisées $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer votre résultat.
3. Donner la définition d'une probabilité sur l'espace probabilisable discret $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, où $\Omega = \mathbb{N}$.

Exercice n°1 (*6 points*)

Déterminer la nature de :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général
$$u_n = \frac{n^2 - \sqrt{n^4 - n^3}}{2 + 3n},$$
2. la série $\sum v_n$ de terme général
$$v_n = n^2 e^{-n} \sin n,$$
3. l'intégrale généralisée
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2} dx.$$
4. l'intégrale généralisée
$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2} dx.$$

Exercice n°2 (*5 points*)

1. Démontrer la convergence de l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} \, dx.$$
2. Soit $a > 0$ un réel. Démontrer l'égalité
$$\int_0^a \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} \, dx = \int_0^{\text{Arctan } a} \sin^2 t \; dt.$$
On pourra appliquer, après justification, le changement de variables $t = \text{Arctan } x$.
3. Soit $b > 0$ un réel. Calculer
$$\int_0^b \sin^2 t \; dt.$$
4. En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} \, dx.$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ *(5 points)*

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 3. On tire successivement deux boules, avec remise, et on observe les numéros obtenus.

1. Donner un univers fini Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ qui modélisent cette expérience aléatoire.
2. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la première boule et Y la variable aléatoire correspondant à la somme des numéros des deux boules.
   (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
   (b) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(bonus)*

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et Y suit la loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.
Déterminer la loi de $X + Y$.