UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle du 15/12/23 (Durée : 2h)

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le contrôle est constitué de questions de cours et de quatre exercices. Les exercices sont indépendants les uns des autres. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Un barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours *(4,5 points)*

1. Donner la nature des intégrales de Riemann $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer votre résultat.
2. Soient A, B, C trois évènements dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Quand dit-on de A, B, C qu'ils sont mutuellement indépendants ?
3. Rappeler la définition d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Vérifier que l'espérance d'une telle variable aléatoire existe.

Exercice n°1 *(4,5 points)*

Déterminer la nature de :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général
$$u_n = \frac{n!}{e^n},$$
2. la série $\sum v_n$ de terme général
$$v_n = \ln(\frac{n^2}{n^2+1}),$$
3. l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x(1+\sqrt{x})}dx.$$

Exercice n°2 *(3 points)*

1. Déterminer les réels a, b, c tels que pout tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on ait
$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{b+ct}{1+t^2}.$$
2. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale
$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\tan x}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ (*4 points*)

1. Vérifier que la fonction F qui à $x \in]1, +\infty[$ associe l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ est bien définie. Montrer que F est une fonction de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, dont on calculera la dérivée.
2. (a) Pour $x \in]1, +\infty[$, montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$.

   (b) Soit $x \in]1, +\infty[$. Vérifier que, pour $t \in [x, x^2]$, on a

$$\frac{x}{t \ln t} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t \ln t}.$$

   (c) En déduire que F se prolonge par continuité en 1.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ (*4 points*)

On lance deux dés parfaitement équilibrés à quatre faces, numérotées de 1 à 4, et on observe les numéros obtenus. Un dé est rouge, l'autre bleu.

1. Donner un univers fini Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ qui modélisent cette expérience aléatoire.
2. On note X le résultat du dé rouge, et Y le maximum des deux résultats.
   (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
   (b) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?