Analyse et Probabilités 3

Éléments de correction du contrôle du 18/11/21

Questions de cours *(4,5 points)* : voir le cours !

Exercice n°1 *(2 points)*

On a $|u_n| = \frac{|\sin n|}{1+n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, donc la série $\sum u_n$ converge absolument par comparaion de séries à termes positifs (on reconnait à droite le terme général d'une série de Riemann convergente). Or la convergence absolue entraine la convergence, donc la série $\sum u_n$ converge.

Exercice n°2 *(4,5 points)*

1. Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
Si $\alpha > 0$, la série vérifie le critère spécial des séries alternées, donc est convergente. Notons qu'elle est même absolument convergente si $\alpha > 1$.
Pour $\alpha = 0$, la suite $(u_n)_n$ n'admet pas de limite (elle admet deux valeurs d'adhérence différentes). De même si $\alpha < 0$, où $|u_n|$ diverge vers $+\infty$. Dans ces deux cas, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
2. D'après le cours, on a $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0.
3. On a
$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}.$$
D'après la question 2 (en tronquant le développement à l'ordre deux), puisque $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a
$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\Big)$$
d'où
$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}}).$$
Or :
-le premier et le troisième terme dans le membre de droite donnent des séries vérifiant le critère spécial des séries alternées, donc convergentes,
-le dernier terme est négligeable en valeur absolue devant $1/n^{3/2}$, donc la série correspondante est absolument convergente (donc convergente) par comparaison entre séries à termes positifs,
-enfin le second terme est l'opposé du terme général de la série harmonique, donc la série correspondante diverge.

   Supposons par l'absurde que $\sum v_n$ converge. Alors la série de terme général
$$v_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} - o(\frac{1}{n^{3/2}})$$
convergerait aussi par somme de séries convergentes. Mais son terme général est égal à $\frac{-1}{n}$ qui donne une série divergente. On a donc démontré par l'absurde que la série $\sum v_n$ diverge.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ *(4+2 points)*

1. (a) La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$. Une primitive de f est donnée par $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Ainsi

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{2}.$$

(b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n).$$

On reconnait donc une somme de Riemann associée à f sur $[0,1]$. En particulier la suite $(S_n)_n$ converge vers l'intégrale de f sur $[0,1]$, donc vers $\frac{\ln 2}{2}$.

2. (a) La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc est uniformément continue sur $[0,1]$ d'après le théorème de Heine.

(b) (*bonus*) Soient x et y des réels. Alors

$$f(x) - f(y) = (x-y)\frac{1-xy}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Si $|xy| \leq 1$, on a $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|\frac{1+|xy|}{1} \leq 2|x-y|$.
Si $|xy| > 1$, on a $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|\frac{1+|xy|}{1+(xy)^2} \leq |x-y|$.

Donc dans tous les cas $|f(x)-f(y)| \leq 2|x-y|$. On conclut alors ainsi : soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \epsilon/2$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $|x-y| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|x-y| < 2\delta = \epsilon.$$

En particulier f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque. On peut aussi montrer que f est dérivable de dérivée bornée sur $\mathbb{R}$. On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis, que f est Lipschitzienne, donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Noter qu'à la quatrième ligne, on a aussi montré le caractère Lipschitzien de f.

Remarque bis. On peut aussi remarquer que la limite de f en $+\infty$ existe, et utiliser l'exercice 6 de la feuille de TD3.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(5,5 points)*

1. La suite $f(n)$ est positive pour $n > 1$ et équivalente à $\frac{1}{n^3}$, donc la série $\sum f(n)$ converge par comparaison de séries à termes positifs.
2. En multipliant l'identité par $1+u$ puis en évaluant u en -1, on obtient $a = 1/4$.
En multipliant l'identité par $(1-u)^2$ puis en évaluant u en 1, on obtient $c = 1/2$.
En multipliant l'identité par u puis en faisant tendre u vers $+\infty$, on obtient $0 = a - b$, donc $b = 1/4$.

3. La fonction intégrée est continue sur $[0,1/2]$, donc intégrable. Par linéarité, et la question 2, on a

$$\int_0^{1/2} \frac{du}{(1+u)(1-u)^2} = \frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{du}{1+u} + \frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{du}{1-u} + \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{du}{(1-u)^2}.$$

$$= \frac{1}{4}[\ln(1+u)]_0^{1/2} + \frac{1}{4}[-\ln(1-u)]_0^{1/2} + \frac{1}{2}[\frac{1}{1-u}]_0^{1/2} = \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}.$$

4. Remarquons que la fonction intégrée est continue sur $[0, \pi/6]$, donc intégrable. Les règles de Bioche nous incitent à effectuer le changement de variables $u = \sin x$. Ce changement de variables est licite car la fonctions $x \mapsto \sin x$ est de classe C^1 sur $[0, \pi/6]$. On a alors $du = \cos x dx$ et donc

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{(1-\sin x)\cos x} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)\cos^2 x} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)}$$

donne après changement de variables

$$\int_0^{1/2} \frac{du}{(1-u)(1-u^2)} = \int_0^{1/2} \frac{du}{(1+u)(1-u)^2}$$

qui vaut $\frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}$ d'après la question précédente.