UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle du 18/11/21 (Durée : 2h)

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le contrôle est constitué de questions de cours et de quatre exercices. Les exercices sont indépendants les uns des autres. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Un barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours *(4,5 points)*

1. Donner la définition d'une série numérique convergente.
2. Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente. Énoncer et démontrer le résultat sur la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Donner la définition de la continuité uniforme d'une fonction définie sur un intervalle I.
4. Énoncer le théorème de changement de variables pour les intégrales sur un segment.

Exercice n°1 *(2 points)*

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est $u_n = \frac{\sin n}{1+n\sqrt{n}}$.

Exercice n°2 *(4,5 points)*

1. Déterminer, en fonction du nombre réel α, la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
3. En déduire la nature de la série
$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Exercice n°3 *(4+2 points)*

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

1. (a) Justifier l'existence de l'intégrale
$$\int_0^1 f(t)dt,$$
puis calculer la.
   (b) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$. Étudier la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. (a) La fonction f est-elle uniformément continue sur $[0,1]$?
   (b) (*bonus*) La fonction f est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(5,5 points)*

Soit f la fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par

$$f(u) = \frac{1}{(1+u)(1-u)^2}.$$

1. Déterminer la nature de la série $\sum f(n)$.
2. Trouver les réels a, b et c tels que pour tout $u \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ on ait :

$$f(u) = \frac{a}{1+u} + \frac{b}{1-u} + \frac{c}{(1-u)^2}.$$

3. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{1/2} \frac{du}{(1+u)(1-u)^2}.$$

4. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{(1-\sin x)\cos x}.$$