UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle du 18/11/22 (Durée : 2h)

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits. Le contrôle est constitué de questions de cours et de quatre exercices. Les exercices sont indépendants les uns des autres. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation. Un barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours *(4,5 points)*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$ avec $\alpha > 1$. Démontrer que la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Donner la définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$.
3. Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales sur un segment.

Exercice n°1 *(4,5 points)*

Étudier la nature de la série $\sum\limits_n u_n$ dont le terme général est

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{3 + e^{-n}}$,
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + n + 1}$,
3. $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2 - \sqrt{n}}$.

Exercice n°2 *(3 points)*

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x$.
2. Étudier la nature de la série $\sum\limits_n (e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1)$

Exercice n°3 *(3 points)*

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2 + x^2}}$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale
$$\int_0^1 f(t)dt,$$
puis calculer la.
2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{2n^2 + k^2}}$. Étudier la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(5 points)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. (a) Justifier l'existence de l'intégrale I_n et démontrer l'inégalité
$$I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx.$$
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. (a) Calculer $I_n + I_{n+1}$.
   (b) Démontrer l'égalité
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (I_k + I_{k+1}) = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$
   (c) Démontrer la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.