Analyse et Probabilités 3

Éléments de correction du contrôle du 18/11/22

Questions de cours : voir le cours.

Exercice n°1

Tous les équivalents sont considérés lorsque n tend vers $+\infty$.

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{3 + e^{-n}}$.

   Puisque le terme e^{-n} converge vers zéro quand n tend vers l'infini, on a $|u_n| \sim \dfrac{\ln n}{3}$ et donc la suite $(|u_n|)_n$ diverge vers $+\infty$. En particulier la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers zéro, et donc la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + n + 1}$.

   On remarque que $|u_n| \sim \dfrac{1}{n^2}$ car $\dfrac{n^2}{n^2+n+1} = \dfrac{1}{1 + 1/n + 1/n^2}$ converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc par équivalence de séries à termes de signe constant, on en déduit la convergence absolue, et donc la convergence, de $\sum_n u_n$.

3. $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2 - \sqrt{n}}$.

   On remarque que
   $$|u_n| \leq \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}.$$
   Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc par équivalence de séries à termes de signe constant, on en déduit la convergence de $\sum \dfrac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$, puis par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit la convergence absolue, et donc la convergence, de $\sum_n u_n$.

Remarque : non, non, et non, $n^2 - \sqrt{n}$ n'est pas égal à $n^{3/2}$.

Exercice n°2 *(3 points)*

1. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x$ est $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$.
2. Puisque le terme $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on obtient d'après la première question :
   $$e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

Or la série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge car elle vérifie le critère spécial des séries alternées (en effet $(-1)^n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est toujours positif, et la suite $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})_n$ décroit vers 0 par croissance de la fonction racine sur $]0, +\infty[$). Par ailleurs

$$\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n},$$

et puisque ces deux suites sont de signe constant (ici positif), alors la divergence de la série harmonique entraine la divergence de la série $\sum_n (\dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n}))$.

On en déduit la divergence de la série $\sum_n (e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1)$ par une démonstration par l'absurde. Supposons en effet qu'elle converge. Alors par différence de deux séries convergentes, la série de terme général

$$(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$$

devrait converger, alors qu'on vient de vérifier que ce n'était pas le cas.

Remarque : Il est vrai que $e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et que la série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais pour autant la série $\sum_n (e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1)$ diverge.

Exercice n°3 (*3 points*)

1. $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[2, 3] \subset [0, +\infty[$. Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on en déduit (théorème de composition) que $x \mapsto \sqrt{2 + x^2}$ est continue sur $[0, 1]$. Cette dernière fonction ne s'annulant pas sur $[0, 1]$, f est finalement continue sur $[0, 1]$ (comme quotient de telles fonctions). En conséquence, f est intégrable sur le segment $[0, 1]$ et $\int_0^1 f$ existe.
   On rappelle d'autre part que si u est une fonction dérivable sur I et à valeurs dans $J \subset]0, +\infty[$ alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. On a donc $\int_0^1 f = \int_0^1 \dfrac{2x}{2\sqrt{2 + x^2}} dx = \left[\sqrt{2 + x^2}\right]_0^1$ soit finalement $\int_0^1 f = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.
2. On a $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\sqrt{n^2(2 + \frac{k^2}{n^2})}} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\frac{k}{n}}{\sqrt{2 + \frac{k^2}{n^2}}}$. Par suite, $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann de f sur le segment $[0, 1]$. Comme f est intégrable sur ce segment, on a alors

$$S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^1 f = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Exercice n°4 (*5 points*)

1. (a) La fonction rationnelle $x \longmapsto \dfrac{x^n}{1 + x}$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Elle est donc intégrable sur cet intervale et I_n existe.
   - $\forall x \in [0, 1]$, $1 + x \geqslant 1$ et donc $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1 + x} \leqslant x^n$,

- $x \longmapsto x^n$ est également intégrable (car continue) sur $[0,1]$ (avec $0<1$).

La croissance de l'intégrale entraîne alors :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx.$$

(b) Comme $\int_0^1 x^n dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (théorème des gendarmes).

2. (a) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx + \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 \dfrac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx$ (par linéarité de l'intégrale). On a donc $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \dfrac{x^n(1+x)}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$.

(b) On a $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(I_k+I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1})$ où l'on a posé $u_k = (-1)^k I_k$ (et ce en remarquant que $(-1)^k = -(-1)^{k+1}$). On reconnaît ici une somme télescopique et donc :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(I_k+I_{k+1}) = u_0 - u_{n+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

(c) D'après a) et b), $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(I_k+I_{k+1}) = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$.

On en déduit (par changement d'indice, en posant $j = k+1$), $\sum_{j=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^{j+1}}{j} = I_0 + (-1)^n I_n$.

Comme, d'après 1.b., $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j+1}}{j}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite finie donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge. La somme de cette série est la limite de la suite des sommes partielles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = I_0 + 0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(2).$$