UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Éléments de correction du contrôle du 7/10/21

Questions de cours *(3,5 points)*

1) Si f a un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

si f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 et si sa dérivée f' a un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0, celui-ci est : $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$.

2) Par définition, il existe une fonction h définie sur un voisinage de $+\infty$ telle que $f = gh$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$. En particulier pour n assez grand $f(n) = g(n)h(n)$, avec $\lim_{n\to+\infty} h(n) = 1$. Les suites $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc équivalentes.

3) On appelle reste à l'ordre n d'une série convergente $\sum u_n$ vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la quantité $R_n = S - S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice n°1 *(4,5 points)*

1) On a $\ln(1+X) = X - \dfrac{X^2}{2} + X^2\varepsilon(X)$ et $\sqrt[3]{1+X} = (1+X)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}X - \dfrac{1}{9}X^2 + X^2\varepsilon(X)$ avec $\lim_{X\to 0}\epsilon(X) = 0$.

2) On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ donc $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x)$ et comme $\sin^2 0 = 0$, le théorème de substitution donne $\ln(1+\sin^2 x) = x^2 - 5\frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x)$. D'autre part, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$ donc $\ln(\cos x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x)$ par substitution, puisque $\cos 0 = 1$. Enfin, toujours par substitution, $\sqrt[3]{1+x^4} = 1 + \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4)$.

3) On déduit de la question précédente que

$$\frac{\ln(1+\sin^2 x) + 2\ln(\cos x)}{1 - \sqrt[3]{1+x^4}} = \frac{-x^4 + x^4\varepsilon(x)}{-\frac{1}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x)} = \frac{-1+\varepsilon(x)}{-\frac{1}{3}+\varepsilon(x)}$$

tend vers 3 quand x tend vers 0.

Exercice n°2 *(5 points)*

1) On a $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)$. Comme $\arcsin 0 = 0$, le théorème d'intégration assure que $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$.

2) Pour $x \neq 0$ on a $f(x) = \dfrac{\arcsin x - x}{x\arcsin x} = \dfrac{\frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}{x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^5)} = \dfrac{\frac{x}{6} + \frac{3x^3}{40} + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$.

Or, $\dfrac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$ donc $f(x) = \left(\frac{x}{6} + \frac{3x^3}{40} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x}{6} + \frac{17}{360}x^3 + o(x^3)$

3) On en déduit $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et donc f, continue sur $[-1,1]\backslash\{0\}$, est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$. Comme f admet en 0 un développement limité à l'ordre 1, ce prolongement est dérivable en 0 et on a $f'(0)=\dfrac{1}{6}$ (coefficient de x). Enfin, la position, au voisinage de 0, de la courbe par rapport à sa tangente (d'équation $y=\dfrac{1}{6}x$) est donnée par le signe de $f(x)-\dfrac{1}{6}x=\frac{17}{360}x^3+o(x^3)$. Comme $\frac{17}{360}>0$, la courbe est au dessous puis au dessus de sa tangente (point d'inflexion).

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ (*3,5 points*)

1) Par addition de développements limités à l'ordre 2, on a $u_n=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n^2})\right)=-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})$. On en déduit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$.

2) Équivalente à une série négative, la série est négative à partir d'un certain rang. En effet $u_n=\frac{-1}{2n}w_n$ avec $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 1, et donc à partir d'un certain rang w_n est positive.

3) Le théorème d'équivalence s'applique donc et $\sum u_n$ diverge (car la série harmonique diverge).

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ (*4,5 points*)

1) On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n^2}}{n^2.\frac{1}{n}}=1$ et la série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente.

2) On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq u_n\leq \dfrac{e}{n^{\frac{3}{2}}}$ et $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge (série de Riemann avec $\dfrac{3}{2}>1$) donc $\sum u_n$ converge (théorème de comparaison pour les séries positives).

3) On a $u_n\geq 1.\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Or, $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc $\sum u_n$ diverge (théorèmes d'équivalence puis de comparaison pour les séries positives).