Analyse et Probabilités 3

Contrôle du 7/10/21 (Durée : 2h)

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le contrôle est constitué de questions de cours et de quatre exercices. Les exercices sont indépendants les uns des autres. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Questions de cours

1. Énoncer la proposition sur le développement limité de la dérivée d'une fonction.
2. Soient f et g des fonctions définies sur un voisinage de $+\infty$. On suppose que f et g sont équivalentes en $+\infty$. Démontrer que les suites $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.
3. Quand et comment définit-on le reste d'une série ?

Exercice n°1

1. Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$.
2. En déduire les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions $x \mapsto \ln(1+\sin^2 x)$, $x \mapsto \ln(\cos x)$ et $x \mapsto \sqrt[3]{1+x^4}$.
3. La fonction définie par
$$x \mapsto \frac{\ln(1+\sin^2 x)+2\ln(\cos x)}{1-\sqrt[3]{1+x^4}}$$
admet-elle une limite en 0 ? Si oui, déterminer la.

Exercice n°2

On considère la fonction f définie sur un voisinage de 0, mais pas en 0, par
$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}.$$
On rappelle que la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Donner le développement limité de arcsin à l'ordre 5 en 0.
2. En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée est dérivable en 0. Donner la valeur de la dérivée en 0.
4. Quelle est la position relative de la courbe représentative de f à l'origine et de sa tangente ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = n\left(\ln(\frac{n+1}{n}) - \sin(\frac{1}{n})\right).$$

1. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de signe constant à partir d'un certain rang.
3. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est :

1. $u_n = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2\sin(1/n)}$
2. $u_n = \frac{e^{\sin n}}{\sqrt{n}(n+1)}$
3. $u_n = (2+\cos n)\ln(\frac{n+1}{n})$