UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle du 13/10/22 (Durée : 2h)

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le contrôle est constitué de questions de cours et de quatre exercices. Les exercices sont indépendants les uns des autres. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Un barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours *(4,5 points)*

1. Énoncer la proposition assurant l'existence du développement limité de la composition de deux fonctions.
2. Étudier la convergence de la suite $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Donner la définition, ainsi qu'un exemple, d'une série grossièrement divergente.

Exercice n°1 *(4 points)*

1. Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions $x \mapsto e^{x^2}$ et $x \mapsto (1+x^2)^3$.
2. Déterminer le réel a pour lequel la limite pour x tendant vers 0 de

$$x \mapsto \frac{(1+x^2)^3 - 3e^{x^2} + a}{(1-\cos x)^2}$$

est finie. Calculer alors cette limite.

Exercice n°2 *(4 points)*

On considère la fonction f définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

1. Donner le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0.
2. En déduire le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée est dérivable en 0. Donner la valeur de la dérivée en 0.
4. Dessiner l'allure de la courbe représentative de f à l'origine et de sa tangente.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ *(3,5 points)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}.$$

1. Étudier la limite de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. Montrer que
$$u_n \geq \frac{1}{2n}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(4,5 points)*

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est :

1. $u_n = \dfrac{2^n + n^2}{2^n + n^4}$,
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n^2 + 3}$,
3. $u_n = \dfrac{\cos^2 n}{3^n}$.