UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Éléments de correction du contrôle du 13/10/22

Questions de cours : voir le cours.

Exercice n°1

1. Par substitution dans les développements limités de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto (1+x^2)^3$ à l'ordre 4 en 0 (en fait l'ordre deux suffit ici), ce qu'on peut faire vu que la fonction $x \mapsto x^2$ s'annule en 0, on obtient

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4)$$

   et

$$(1+x^2)^3 = 1 + 3x^2 + 3x^4 + o(x^4).$$

2. On en déduit le développement limité du numérateur à l'ordre 4 en 0 par somme de développements limités au même ordre (et au même point) :

$$(1+x^2)^3 - 3e^{x^2} + a = a - 2 + 3x^4/2 + o(x^4).$$

   Par ailleurs le développement limité à l'ordre 4 en 0 du dénominateur est

$$(1-\cos x)^2 = (x^2/2 - x^4/4! + o(x^4))^2 = x^4/4 + o(x^4)$$

   par produit de développements limités. Ainsi la fonction étudiée est égale à

$$\frac{a - 2 + 3x^4/2 + o(x^4)}{x^4/4 + o(x^4)}$$

   au voisinage de 0. Remarquons que si $a \neq 2$, le numérateur tend vers une limite non nulle quand x tend vers 0, alors que le dénominateur tend vers 0 : le quotient n'a alors pas de limite finie. Pour a=2, on obtient une forme indéterminée, mais on peut lever l'indétermination en simplifiant :

$$\frac{3x^4/2 + o(x^4)}{x^4/4 + o(x^4)} = \frac{3/2 + o(1)}{1/4 + o(1)},$$

   et cette dernière expression tend vers 6 quand x tend vers 0.
   Ainsi la fonction admet une limite finie si et seulement si $a = 2$, et cette limite vaut alors 6.
   Remarques
   (a) On n'a pas eu besoin de calculer le développement limité du quotient.
   (b) On aurait pû utiliser l'équivalent $(1-\cos x)^2 \sim x^4/4$ au dénominateur plutôt que le développement limité, car par définition d'un équivalent, la fonction

$$\frac{(1+x^2)^3 - 3e^{x^2} + a}{(1-\cos x)^2}$$

   admet une limite si et seulement si la fonction

$$\frac{(1+x^2)^3 - 3e^{x^2} + a}{x^4/4}$$

   en admet une, et si c'est le cas ces limites deux sont égales.

Exercice n°2

1. D'après le cours
$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$$
au voisinage de 0.
2. On a alors
$$f(x) = \frac{x}{x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)} = \frac{1}{1 - x/2 + x^2/3 + o(x^2)}$$
au voisinage de 0. Posons $g(x) = -x/2 + x^2/3 + o(x^2)$. La fonction g tend vers 0 en 0, donc par substitution dans le développement limité de $X \mapsto \dfrac{1}{1+X}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0, on obtient
$$f(x) = 1 - (-x/2 + x^2/3) + (-x/2 + x^2/3)^2 + o(x^2) = 1 + x/2 - x^2/12 + o(x^2).$$
3. Puisque f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, elle admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 par troncature, c'est-à-dire elle admet une limite en 0 (qui vaut 1). En posant $f(0) = 1$ on prolonge alors f par continuité en 0.
Puisque f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 par troncature, et donc elle est dérivable en 0 d'après un résultat du cours. Le nombre dérivée en 0 est alors le coefficient devant x dans ce développement limité, donc $f'(0) = 1/2$.
4. D'après la question précédente, une équation de la tangente au graphe de f en 0 est $y = 1 + x/2$. De plus
$$f(x) - (1 + x/2) = -x^2/12 + o(x^2)$$
est négatif au voisinage de 0. Donc le graphe de f est situé sous la tangente au voisinage de 0.

Exercice n°3

1. On écrit pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_{n+1} \cdot \frac{1}{u_n} &= \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2(n+1)-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n) \times (2(n+2))} \cdot \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{n}}.\end{aligned}$$
Donc la limite de la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ existe et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

2. On cherche à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} \leq 1.$$
ATTENTION : beaucoup d'étudiants ont regardé des choses comme $nu_{n+1} - nu_n$ ou $\frac{nu_{n+1}}{nu_n}$.

La question précédente nous permet d'écrire directement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n+2)}.$$
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+2n}.$$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$2n^2 + 2n < 2n^2 + 3n + 1,$$

donc

$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} > 1,$$

donc $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est (strictement) croissante.

3. La suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante donc en particulier on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$nu_n \geq 1 \cdot u_1 = \frac{1}{2}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a bien

$$u_n \geq \frac{1}{2n}.$$

Remarque : La récurrence que beaucoup ont faite était possible mais inutile ici.

4. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc aussi la série $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$. On a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq \frac{1}{2n} \leq u_n.$$

Donc par comparaison de séries à termes **POSITIFS** la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice n°4

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est :

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1+\frac{n^2}{2^n}}{1+\frac{n^4}{2^n}}$. Comme $2^n = e^{n\ln 2}$ avec $\ln 2 > 0$, le théorème de croissances comparées entre les fonctions puissances et exponentielles assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+0}{1+0} = 1$. La série $\sum u_n$ est donc (grossièrement) divergente (son terme général ne tend pas vers 0).

Remarques :
• Invoquer sans précision la croissance comparée était insuffisant. D'ailleurs certaines copies l'invoquent pour obtenir un résultat faux. . ..
• Attention à ne pas confondre les objets : terme général u_n, suite (u_n), série $\sum u_n$.

2. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}.\dfrac{\frac{(-1)^n}{n}+1}{1+\frac{3}{n^2}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{(-1)^n}{n}+1}{1+\frac{3}{n^2}} = \dfrac{0+1}{1+0} = 1$, on en déduit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), le théorème d'équivalence pour les séries positives (noter que u_n est au moins positif à partir d'un certain rang puisque équivalent à $\dfrac{1}{n}$ qui est positif) permet d'affirmer que $\sum u_n$ diverge.

Remarques :
• La série n'est pas du tout alternée (voir point suivant).
• On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n + n \geqslant 0$ et en particulier $|u_n| = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+3}$ et ce bien qu'un étudiant sur deux affirme que $|u_n| = \dfrac{1+n}{n^2+3}\cdots$
• Il était possible d'écrire u_n comme une somme mais c'était vraiment maladroit.

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{3^n} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. La série $\sum \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ étant convergente (série géométrique de raison q avec $|q| < 1$), le théorème de comparaison pour les séries positives permet d'affirmer que $\sum u_n$ converge.

   Remarques :

   • Là aussi, affirmer sans le justifier que $\dfrac{1}{3^n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ était insuffisant.

   • Utiliser le critère de d'Alembert (critère de comparaison aux séries géométriques) pour étudier la nature de la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ est quelque peu déroutant…