Université de Rennes

Analyse et Probabilités 3

Éléments de correction du contrôle du 15/10/24

Questions de cours

1. Une série géométrique est une série $\sum u_n$ où $(u_n)_n$ est une suite géométrique.
   Une suite géométrique est définie par récurrence par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$ et la relation $u_{n+1} = qu_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, où $q \in \mathbb{C}$. Le nombre q est appelé la raison.
   On peut montrer par récurrence que $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose désormais $u_0 \neq 0$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum q^n$ sont de même nature. On va donc s'intéresser par la suite uniquement aux séries de la forme $\sum q^n$.
   Une série géométrique de raison q converge si et seulement si $|q| < 1$. En cas de convergence, la somme de la série vaut $\frac{1}{1-q}$.
   Remarque : *Le module (ou la valeur absolue quand on a étudié que le cas réel) a souvent été oublié.*
3. Si $|q| \geq 1$, alors $|u_n| \geq 1$ et donc la suite $(u_n)_n$ ne peut pas converger vers 0. La série est donc grossièrement divergente.
   Supposons $|q| < 1$. Remarquons que les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_n$ vérifient $(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où
   $$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
   Or la suite $(q^{n+1})_n$ tend vers 0 puisque $|q| < 1$, donc la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge vers $\frac{1}{1-q}$. Ainsi la série $\sum q^n$ converge vers $\frac{1}{1-q}$.

Exercice n°1 : Vrai ou faux. (*6 points*)

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse "vrai" ou "faux" non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, alors $(f-g)(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$.
   Réponse : Faux. Contre-exemple : $f(x) = x^2 + x^3$ et $g(x) = x^2$.
2. La primitive F de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, avec F prenant la valeur 1 en 0, vérifie
   $$F(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \underset{x\to 0}{o}(x^6).$$
   Réponse : Vrai. Par substitution de développements limités au voisinage de 0, on a $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)$. Donc par intégration de développement limité, on trouve $F(x) = F(0) + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^6)$, avec $F(0) = 1$.
3. La fonction définie par $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}\ \sin x}{x^2 e^x}$ admet 1 pour limite en 0.
   Réponse : Faux. $e^x = 1 + o(x)$, $\sin(x) = x + o(x^2)$, $\sqrt{1+x} = 1 + o(x)$ qui impliquent $\frac{\sqrt{1+x}\ \sin x}{x^2 e^x} = \frac{h(x)}{x}$, où $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$. Donc, la limite de la fonction donnée quand $x \to 0$ n'existe pas (elle admet des limites à droite et à gauche, mais qui sont différentes).
4. Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre 2 en 0. Si les développements limités de f et g à l'ordre 2 en 0 sont égaux, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$.
   Réponse : Faux. Contre-exemple : $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^4$.

5. On a $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
Réponse : Vrai. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$. Donc, $\cos(x)(\sin(x)+1)^{-1} = (1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3))(1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + o(x^3)) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.
Réponse : Faux. Contre-exemple : $u_n = 1/n$, $v_n = -1/n$ qui impliquent $u_n + v_n = 0$.

Remarques :

1. Pour no. 1, 4 donner un contre-exemple.
2. Pour no. 5, il y a souvent des erreurs de calcul.
3. Pour no. 3, la justification la plus correcte est que la limite n'existe pas, mais on a souvent trouvé l'affirmation erronée que la limite est l'infini.
4. Pour no. 4, on ne peut pas supposer que les termes d'ordre 0, 1, 2 ne sont pas 0.

Exercice n°2 *(5 points)*

1. Établir les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions $x \mapsto \ln(\cos x)$ et $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.
2. Déterminer le réel a pour lequel la limite en 0 de

$$x \mapsto \frac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} + a}{x^2 \tan x}$$

est finie. Calculer alors cette limite.

Réponse :

1. $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
2. Posons $f(x) = \frac{\ln(\cos x)+\sqrt{1+x^2}+a}{x^2\tan x}$. On voit que f n'a pas de limite finie en 0 si $a \neq -1$ car le numérateur tend vers une limite non nulle, alors que le dénominateur tend lui vers 0 quand x tend vers 0.
3. En utilisant les développements limités précédents et $\tan(x) \sim x$ (quand $x \to 0$) on trouve : $f(x) = o(1)$ qui implique $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exercice n°3 *(6 points)*

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leqslant \dfrac{1+|\cos n|}{n\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{2}{n\sqrt{n+1}}$ donc $|u_n| \leqslant \dfrac{2}{n\sqrt{n}}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge (série de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$), $\sum u_n$ converge absolument (théorème de comparaison pour les séries positives) et donc converge.

2. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt[3]{n^3(1+\frac{1}{n^2})} - n = n\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$. Comme $(1+X)^\alpha - 1 \underset{X\to 0}{\sim} \alpha X$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{n}$. Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc $\sum u_n$ diverge (théorème d'équivalence pour les séries positives).

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = e^{-\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$. Comme $e^X \underset{X\to 0}{\sim} 1$ et $e^Y - 1 \underset{Y\to 0}{\sim} Y$, on a finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$. Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc $\sum u_n$ diverge (théorème d'équivalence pour les séries positives).

Remarques :

- *Un développement limité est une égalité... qui devient fausse si l'on perd le reste en cours de route !!*
- $\dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} \dfrac{1}{n}$ *puisque* $\dfrac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2} \neq 1$.
- *Les équivalents font mauvais ménage avec les sommes (ou les différences)...*
- $o(\frac{1}{n}) - o(\frac{1}{n}) = o(\frac{1}{n})$ *! Si vous ne comprenez pas cette égalité, n'utilisez pas les notations de Landau !!*
- *On peut bien sûr utiliser des développements limités pour 2) et 3) mais il vaut mieux être raisonnable dans l'ordre de ces DL (pour éviter des calculs et des justifications inutiles)...*
- *Deux quantités équivalentes en a ont le même signe au voisinage de a (pourquoi ?). Il est donc inutile d'étudier le signe de* u_n *lorsque par la suite on en trouve un équivalent dont le signe est clair...*