Analyse et Probabilités 3

Contrôle du 15/10/24 (Durée : 2h)

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Un barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours (*3 points*)

1. Donner la définition d'une série géométrique.
2. Énoncer le résultat de convergence des séries géométriques.
3. Démontrer le résultat de convergence des séries géométriques.

Exercice n°1 : Vrai ou faux. (*6 points*)

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse "vrai" ou "faux" non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, alors $(f-g)(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$.
2. La primitive F de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, avec F prenant la valeur 1 en 0, vérifie
$$F(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \underset{x\to 0}{o}(x^6).$$
3. La fonction définie par $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}\ \sin x}{x^2 e^x}$ admet 1 pour limite en 0.
4. Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre 2 en 0. Si les développements limités de f et g à l'ordre 2 en 0 sont égaux, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$.
5. On a $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

Exercice n°2 (*5 points*)

1. Établir les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions $x \mapsto \ln(\cos x)$ et $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.
2. Déterminer le réel a pour lequel la limite en 0 de
$$x \mapsto \frac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} + a}{x^2 \tan x}$$
est finie. Calculer alors cette limite.

Exercice n°3 (*6 points*)

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est :

1. $u_n = \dfrac{1-\cos n}{n\sqrt{n+1}}$.
2. $u_n = \sqrt[3]{n+n^3} - n$.
3. $u_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}$.