Université de Rennes

Analyse et Probabilités 3

Éléments de correction du contrôle du 24/10/23

Exercice n°1 : Vrai ou faux.

1. Vrai. Par hypothèse $f(x) = l\varepsilon(x)$ où la fonction ε est définie sur un voisinage de 0 et tend vers 1 en 0, donc f admet l pour limite en 0 par produit de limites.
2. Vrai. Par hypothèse $f(x) = x^2\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = x^3\varepsilon_2(x)$, avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ définies sur un voisinage de 0 et tendant vers 1 en 0. Alors $(f+g)(x) = x^2(\epsilon_1(x) + x\epsilon_2(x))$ et $\epsilon_1(x) + x\epsilon_2(x)$ tend bien vers 1 en 0.
3. Vrai. D'une part $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$. D'autre part $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc par quotient et produit d'équivalents on obtient $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
4. Faux, par exemple les fonctions f et g définies par $f(x) = 1$ et $g(x) = 1 + x$ sont équivalentes en 0, mais ont des développement limités différents à l'ordre un, donc aussi à l'ordre trois.
5. Faux, la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge mais son terme général tend vers 0.
6. Faux, prendre $u_n = \dfrac{1}{2n}$ par exemple.
7. Vrai. Déjà la suite $(u_n)_n$ tend vers 0 car la série $\sum u_n$ converge, d'où $\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$. Par le théorème d'équivalence pour les séries à terme géneral de signe constant, on en déduit le résultat.
8. Vrai. Sinon la série de terme général $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ serait convergente.
9. Faux. La fonction tangente étant impaire, le coefficient d'ordre 6 dans son développement limité doit être nul.

Exercice n°2

1. Le développement limité de la fonction sinus en 0 à l'ordre 4 est $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$. Par produit de développements limités en 0 à l'ordre 4, on obtient $\sin^2 x = T_4((x - x^3/6)^2) + o(x^4) = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$.
   Le développement limité de la fonction cosinus en 0 à l'ordre 4 est $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^4)$. Celui de la fonction $y \mapsto \sqrt{1+y}$ en 0 à l'ordre 2 est $\sqrt{1+y} = 1 + y/2 - y^2/8 + o(y^2)$.
   En posant $y = \cos x - 1 = -x^2/2 + x^4/4! + o(x^4)$, on constate que y tend vers 0 en 0. On en déduit par composition le développement limité de la fonction $x \mapsto \sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)}$:
   $$\sqrt{\cos x} = 1 - x^2/4 - x^4/96 + o(x^4).$$
   On remarque qu'on a utilisé le développement limité de $y \mapsto \sqrt{1+y}$ à l'ordre 2 plutôt qu'à l'ordre 4 car les termes d'ordre 3 et 4 donnent après composition avec $\cos -1$ des ordres strictement plus grands que 4.
2. Par sommation de développements limités d'ordre 4 en 0, le développement limité du numérateur à l'ordre 4 en 0 est $a + 4 - 3x^4/8 + o(x^4)$. Remarquons que le dénominateur est équivalent à x^4 en 0 (on utilise $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et des produits d'équivalents), et donc tend vers 0 en 0. La limite du quotient ne peut donc être finie que si le numérateur tend vers 0 également, donc si $a = -4$. Dans ce cas, on obtient que la fonction étudiée est équivalente à $\dfrac{-3x^4/8 + o(x^4)}{x^4} = -3/8 + o(1)$ et donc admet effectivement une limite finie qui vaut $-3/8$.

Exercice n°3

1) On a $\lim\limits_{X\to 0} e^X = e^0 = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$. De même $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^-$ donc $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ et par suite $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. La série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente (son terme général ne tend pas vers 0).

Remarque : *$\dfrac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\dfrac{1}{\frac{(-1)^n}{n}}$ n'a pour autant pas de limite en $+\infty$ et donc ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$...*

2) On a $\sqrt{1-X} = (1-X)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}X + X\varepsilon(X)$ avec $\lim\limits_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0$. En particulier, $1-\sqrt{1-X} \underset{X\to 0}{\sim} \frac{1}{2}X$. On en déduit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ (car $X = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc $\sum \dfrac{1}{2n}$ diverge et donc $\sum u_n$ diverge (théorème d'équivalence pour les séries positives).

3) On a $\ell n\,(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ donc $\ell n\,(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ (car $X = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). On en déduit alors :
$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$), $\sum u_n$ converge (théorème d'équivalence pour les séries positives).

Remarques :

- *Un développement limité est une égalité... qui devient fausse si l'on perd le reste en cours de route !!*
- $\dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} \dfrac{1}{n}$ *puisque* $\dfrac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2} \neq 1$.
- $\dfrac{1}{n^2+2} \neq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2}$ • $\dfrac{\frac{1}{n}}{n+2} \neq \dfrac{n+2}{n}$ • $\dfrac{1}{\frac{1}{2}n^2} \neq \dfrac{1}{2}n^2$

En résumé, il peut être bon de retravailler les bases de calcul...