Analyse et Probabilités 3

Contrôle du 24/10/23 (Durée : 2h)

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Un barème est donné à titre indicatif.

Exercice n°1 : Vrai ou faux. (*8+1 points)*

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse "vrai" ou "faux" non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. Si $l \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} l$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$.
2. Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$, alors $(f+g)(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.
3. La fonction définie par $x \mapsto \dfrac{x\ln(1+x^2)}{\tan^3 x}$ admet 1 pour limite en 0.
4. Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre 3 en 0. Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$, alors les développements limités de f et g à l'ordre 3 en 0 coincident.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $\sum_n u_n$ converge.
6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si $0 \leq u_n < \frac{1}{n}$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_n u_n$ converge.
7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. Si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n \ln(1+u_n)$ converge.
8. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels. Si $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n v_n$ diverge, alors $\sum_n (u_n+v_n)$ diverge.
9. (*Question bonus*) Le développement limité de la fonction tangente à l'ordre 6 en 0 est
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{8x^6}{29} + o(x^6).$$

Exercice n°2 (*6 points)*

1. Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions $x \mapsto \sqrt{\cos x}$ et $x \mapsto \sin^2 x$.
2. Déterminer le réel a pour lequel la limite en 0 de
$$x \mapsto \frac{4\sqrt{\cos x} + \sin^2 x + a}{x^2(e^x-1)^2}$$
est finie. Calculer alors cette limite.

Exercice n°3 (*6 points)*

Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ dont le terme général est :

1. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{1-\cos\frac{1}{n}}$.
2. $u_n = 1 - \sqrt{1-\frac{1}{n}}$.
3. $u_n = \dfrac{\ln(1+\dfrac{1}{n})}{n+2}$.