Université de Rennes 1 2017-2018

AG2, Examen de seconde session (durée 2h)

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.

Le sujet est composé de questions de cours, suivies par trois exercices. La justesse et la clarté de la rédaction compteront pour une part importante dans l'évaluation.
Toutes les réponses devront être justifiées.

Questions de cours :

(1) Donner la liste des nombres premiers compris entre 150 et 200.
(2) Combien le nombre 11! admet-il de diviseurs ?
(3) Donner la définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel.
(4) Énoncez le théorème du rang.

Exercice 1.
On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\},$$
$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 1\}.$$

(1) Est-ce que E et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
(2) Déterminer une base de E, ainsi que sa dimension.
(3) Déterminer un sous-espace supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $f((x, y, z)) = (y, z, x)$.

(4) Montrer que f est linéaire, et déterminer la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.
(5) Est-ce que f est injective ? Surjective ? Bijective ?
(6) Calculer M^{314159}.
(7) Soit $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(8) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{F}$, ainsi que son inverse P^{-1}.
(9) En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.

TSVP

Exercice 2.
Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-ensemble défini comme suit :

$$E = \{\ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad / \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a \exp x + b \sin x + c \cos x\ \}.$$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
(2) Soient $f_1 : x \mapsto \exp x$, $f_2 : x \mapsto \sin x$ et $f_3 : x \mapsto \cos x$ des fonctions de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que la famille $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ est libre. En déduire que (f_1, f_2, f_3) est une base de E.

On considère l'application $\phi : E \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f + 3f'$, où f' désigne la dérivée de f.

(3) Montrer que ϕ une application linéaire.
(4) Montrer que l'image de ϕ est incluse dans E.
(5) Donner la matrice de ϕ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3.
Les deux droites suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Si elles sont sécantes donner leur point d'intersection et si elles sont parallèles donner un vecteur directeur. Justifier la réponse.

$$D_1 : x + y - z + 2 = 0 \text{ et } x - y + 3 = 0,$$
$$D_2 : 2x - 5y + 2z + 1 = 0 \text{ et } x + z - 1 = 0.$$