AG2, Examen du 20 avril 2018 (durée 2h)

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.

Le sujet est composé de questions de cours, suivies par trois exercices. La justesse et la clarté de la rédaction compteront pour une part importante dans l'évaluation.

Questions de cours :

(1) Énoncer le petit théorème de Fermat.
(2) Soit E un espace vectoriel sur un corps k. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
(3) Donner une base de l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels de taille 2. Justifier.
(4) Donner un exemple d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Justifier.

Exercice 1.
Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus trois.
Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :
Un polynôme à coefficients réels est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

(1) Démontrer que $\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On considère la famille de polynômes à coefficients réels suivante :

$$\mathcal{F} = \{1 + X, 1 - X, 1 + \alpha^2 X + X^2 + X^3, 1 - X + X^2 + \alpha X^3\},$$

où α désigne un paramètre réel.

(2) Déterminer à quelle condition sur α la famille $\mathcal{F}$ est libre.
(3) Déterminer à quelle condition sur α la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

TSVP

Exercice 2.
On considère les sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x - 2y + 3z - 2t = 0\}$$

et

$$G = \text{Vect}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

(1) Est-ce que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$? Justifier.
(2) Montrer que $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à F. Compléter $\{v_1\}$ en une base de F. Quelle est la dimension de F ?
(3) Quelle est la dimension de G ? Justifier.
(4) Montrer que F est inclus dans G.
(5) Déterminer un supplémentaire de F dans G.
(6) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f((x, y, z)) = (z - y, z - x, x + y)$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.
(2) Est-ce que f est injective ?
(3) Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
(4) On pose $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(5) Quelle est la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$?
(6) Est-ce que la matrice P est inversible ? Si oui, calculer son inverse.
(7) On note B la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Exprimer B en fonction de A et P, puis calculer B.
(8) (BONUS) Calculer A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.
