**Module AG2**
**Feuille d'exercices n°8**

Applications linéaires en dimension finie

## 1. Applications linéaires et matrices

**Exercice 1.** Soit $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner l'expression de $f((x, y, z))$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire qui envoie $e_1$ sur son opposé, qui envoie $e_2$ sur le vecteur nul et qui envoie $e_3$ sur la somme des trois vecteurs $e_1, e_2, e_3$. Donner la matrice de $f$ dans la base canonique.

**Exercice 2.** Donner la matrice associée aux applications linéaires $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans la base canonique :

(1) $f_1$ la symétrie par rapport à l'axe $(Oy)$,
(2) $f_2$ la symétrie par rapport à l'axe $(y = x)$,
(3) $f_3$ la projection orthogonale sur l'axe $(Oy)$,
(4) $f_4$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Calculer quelques matrices associées à $f_i \circ f_j$ et, lorsque c'est possible, à $f_i^{-1}$.

**Exercice 3.** Calculer la matrice associée aux applications linéaires $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dans la base canonique :

(1) $f_1$ l'homothétie de rapport $\lambda$,
(2) $f_2$ la réflexion par rapport au plan $(Oxz)$,
(3) $f_3$ la rotation d'axe $(Oz)$ d'angle $-\frac{\pi}{2}$,
(4) $f_4$ la projection orthogonale sur le plan $(Oyz)$.

**Exercice 4.** (1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y, z)) = (x - 2y - 3z, 2y + 3z)$. Donner une base du noyau de $f$, une base de l'image de $f$ et vérifier le théorème du rang.
(2) Faire de même avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z)) = (-y + z, x + z, x + y)$.
(3) Faire de même avec l'application linéaire $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à $X^k$ associe $X^{k-1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et qui à 1 associe 0.

**Exercice 5.** Lorsque c'est possible, calculer la dimension du noyau, le rang et dire si $f$ peut être injective, surjective, bijective :

- Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$.
- Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$.
- Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
- Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$.

**Exercice 6.** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires $f_A$ et $f_B$ associées à $A$ et $B$ dans les bases canoniques.

**Exercice 7.** Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées de même taille $n$ telles que $AB = 0$ et $A + B$ est inversible. Montrer que $\mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\, B = n$.

**Exercice 8.** Soit $E$ un espace vectoriel et $f$ une application linéaire de $E$ dans lui-même telle que $f^2 = f$.

(1) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
(2) Supposons que $E$ soit de dimension finie $n$. Posons $r = \dim \mathrm{Im}\, f$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ telle que $f(e_i) = e_i$ si $i \leqslant r$ et $f(e_i) = 0$ si $i > r$. Déterminer la matrice de $f$ dans cette base $\mathcal{B}$.

**Exercice 9.** Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ : $f(P(X)) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

(1) Montrer que $f$ est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de $f$ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$. Déterminer ensuite, pour une valeur de $n$ quelconque, la matrice de $f$ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
(3) Déterminer le noyau et l'image de $f$. Calculer leurs dimensions respectives.
(4) Soit $Q$ un élément de l'image de $f$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

## 2. Changement de bases

**Exercice 10.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (2x + y, 3x - 2y)$, Soit $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ avec ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}_1 = (\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

(1) Calculer la matrice de $f$ dans la base canonique.

(2) Calculer les coordonnées de $f(v)$ dans la base canonique.
(3) Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$.
(4) En déduire les coordonnées de $v$ dans la base $\mathcal{B}_1$, et de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.
(5) Calculer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

**Exercice 11.** Même exercice dans $\mathbb{R}^3$ avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x,y,z)) = (x-2y, y-2z, z-2x)$, avec $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_1 = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

**Exercice 12.** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de $f$ par rapport à cette base.

**Exercice 13.** Soient trois vecteurs $e_1, e_2, e_3$ formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note $\phi$ l'application linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.
(1) Écrire la matrice $A$ de $\phi$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$. Déterminer le noyau de cette application.
(2) On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer $e_1, e_2, e_3$ en fonction de $f_1, f_2, f_3$. Les vecteurs $f_1, f_2, f_3$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$ ?
(3) Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de $f_1, f_2, f_3$. écrire la matrice $B$ de $\phi$ dans la base $(f_1, f_2, f_3)$ et trouver la nature de l'application $\phi$.
(4) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$. Quelle relation lie $A$, $B$, $P$ et $P^{-1}$ ?

**Exercice 14.** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
(1) Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
(2) Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
(3) Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}$.

**Exercice 15.** Soient $A, B$ deux matrices carrées semblables (i.e. il existe $P$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$). Montrer que
(1) si l'une est inversible, l'autre aussi,
(2) si l'une est idempotente, l'autre aussi
(3) si l'une est nilpotente, l'autre aussi,
(4) si $A = \lambda I$, alors $A = B$.
(5) $A$ et $B$ ont même trace.

**Exercice 16.** Soit $A \in M_2(k)$. Montrer que $A$ est semblable à sa transposée ${}^tA$.