Module AG2
Feuille d'exercices n°6

Dimension

1. Familles libres, familles génératrices

Exercice 1. Pour quelles valeurs du paramètre $t \in \mathbb{R}$ la famille $\{(-1,t),(t^2,-t)\}$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle libre ? Même question avec la famille $\{(1,t,t^2),(t^2,1,1),(1,t,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Montrer que toute famille contenant une famille liée est liée. Montrer que toute famille incluse dans une famille libre est libre.

Exercice 3. *(plus dur)* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit $f : E \to F$ est une application linéaire.

(1) Montrer que l'image par f d'une famille liée de E est une famille liée de F.
(2) Supposons f injective. Montrer que l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F.
(3) Supposons E de dimension finie, avec $\{v_1,\dots,v_n\}$ une base de E. Montrer f est injective si et seulement si la famille $\{f(v_1),\dots,f(v_n)\}$ est libre.

Exercice 5. Pour quelles valeurs du paramètre $t \in \mathbb{R}$ la famille $\{(0,t-1),(t,-t),(t^2-t,t-1)\}$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$? Même question avec la famille $\{(1,0,t),(1,t,t^2),(1,t^2,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Montrer que toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

Exercice 7. Soit $f : E \to F$ est une application linéaire.

(1) Montrer que l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.
(2) Supposons E de dimension finie, avec $\{v_1,\dots,v_n\}$ une base de E. Montrer f est surjective si et seulement si la famille $\{f(v_1),\dots,f(v_n)\}$ est génératrice de F.

2. Bases

Exercice 8. Trouver toutes les manières d'obtenir une base de $\mathbb{R}^2$ à partir des vecteurs suivants : $v_1 = (-1,-3)$, $v_2 = (3,3)$, $v_3 = (0,0)$, $v_4 = (2,0)$, $v_5 = (2,6)$.

Exercice 9. Montrer que la famille $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ des vecteurs $v_1 = (2,1,-3)$, $v_2 = (2,3,-1)$, $v_3 = (-1,2,4)$ et $v_4 = (1,1,-1)$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - y + z = 0$. En extraire une base.

Exercice 10. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 3y - 2z = 0$. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$.
Faire de même avec le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par les équations $x + 3y - 2z = 0$ et $y = z$.

Exercice 11. (1) Montrer que l'ensemble des matrices 3×3 ayant leur diagonale nulle forme un espace vectoriel. En donner une base.
(2) Faire de même avec l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré au plus $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$.

Exercice 12. Vrai ou faux ?
Soit E un espace vectoriel sur k de dimension n.

(1) Une famille de $p \geqslant n$ vecteurs de E est génératrice.
(2) Une famille de $p > n$ vecteurs de E est liée.
(3) Une famille de $p < n$ vecteurs de E est libre.
(4) Une famille génératrice de $p \leqslant n$ vecteurs de E est libre.
(5) Une famille de $p \neq n$ vecteurs de E n'est pas une base.
(6) Une famille libre de $p < n$ vecteurs de E peut se compléter en une base de E en rajoutant une famille de $n - p$ vecteurs bien choisis.

Exercice 13. (1) Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,-1,i)$, $v_2 = (-1,i,1)$, $v_3 = (i,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$.
(2) Calculer les coordonnées de $v = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Exercice 14. (1) Montrer que la famille $\{1, 1-X, X-X^2, X^2-X^3\}$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Décomposer $P = 3X - X^2 + 8X^3$ dans cette base.
(2) Montrer que la famille $\{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$ forme une autre base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$. Décomposer $P = 3X - X^2 + 8X^3$ dans cette base.
(3) Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que toute famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ avec $\deg P_i = i$, pour $i \in \{0,1,\dots,n\}$, forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Dimension

Exercice 15. Soient $F = \mathrm{Vect}\{(1,2,3),(3,-1,2)\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(-7,7,0),(6,5,11)\}$. Montrer que l'un de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ est inclus dans l'autre. En déduire que $F = G$.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \mathrm{Vect}\{(1,t,-1),(t,1,1)\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$. Calculer les dimensions de $F, G, F \cap G$ et $F + G$ en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. Dans un espace vectoriel de dimension 7, on considère des sous-espaces vectoriels F et G vérifiant $\dim F = 3$ et $\dim G \leqslant 2$. Que peut-on dire de la dimension des sous-espaces vectoriels $F \cap G$ et $F + G$?

Exercice 18. Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie, et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $F \oplus G = E$,
(2) $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$,
(3) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Exercice 19. Soit E est un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

(1) *(plus dur)* Montrer que :
$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$
(2) On suppose que $\dim F + \dim G > \dim E$. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Exercice 20. Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie.

(1) Soit $v \in E \setminus H$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}\{v\}$ sont des sous-espaces supplémentaires dans E.
(2) Soit H' un hyperplan de E différent de H. Calculer la dimension de $H \cap H'$.

Exercice 21. Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Exercice 22. *(plus dur)* Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de même dimension d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H supplémentaire à la fois de F et de G dans E.

4. Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 23. Quel est le rang de la famille de vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$?

Même question pour $\left\{\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}\right\}$ en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. Mettre sous forme échelonnée par rapport aux colonnes la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & -2 & -1\\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Calculer son rang. Faire de même avec $\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 5\\ -2 & 1 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Exercice 25. Calculer le rang de $\begin{pmatrix}2 & 4 & -5 & -7\\ -1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & a & -2 & b\end{pmatrix}$ en fonction de a et b.

Exercice 26. Calculer les rangs des matrices des exercices précédents en utilisant les vecteurs lignes.

Exercice 27. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Quelle inégalité relie $\mathrm{rang}\{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ et $\mathrm{rang}\{v_1, \ldots, v_p\}$? Que se passe-t-il si f est injective ?

Exercice 28. Soit a et b deux réels et A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b\\ 3 & 0 & 1 & -4\\ 5 & 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$$
Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?