Module AG2
Feuille d'exercices n°5

Espaces vectoriels

1. Exemples

Exercice 1. Redémontrer que $\mathbb{R}^3$, muni de l'addition et la multiplication externe habituelles, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2. Redémontrer que les ensembles suivants, muni de l'addition et la multiplication externe habituelles, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

(1) l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

(2) l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $\mathbf{k}$ un corps. Montrer que les ensembles suivants, munis de l'addition et la multiplication externe habituelles, sont des $\mathbf{k}$-espaces vectoriels :

(1) l'ensemble $M_{n,p}(\mathbf{k})$ des matrices de taille $n\times p$, avec $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$,

(2) l'ensemble $\mathbf{k}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{k}$.

Exercice 4.

Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni des lois usuelles $+$ et $\cdot$ (alors qu'on note l'addition dans $\mathbb{R}$ avec le signe $+$, et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sans symbole). On note $\mathbf{0}$ son vecteur nul.

On considère les vecteurs suivants de E :

$$f=\cos^2, g=\sin^2, h : x\mapsto \cos 2x, u : x\mapsto 1.$$

(1) Soient les vecteurs $v=(3\cdot f)+(2\cdot g)$ et $w=2\cdot((3\cdot h)+((-2)\cdot u))$ de E.

Pour $x\in\mathbb{R}$, préciser, en détaillant les calculs (au moins trois égalités) la valeur de $v(x)$ et de $w(x)$.

(2) Montrer que $f+g+((-1)\cdot u)=\mathbf{0}$.

(3) Montrer que $h+u+((-2)\cdot f)=\mathbf{0}$.

Exercice 5.

Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni des lois usuelles $+$ et $\cdot$ (alors qu'on note l'addition dans $\mathbb{R}$ avec le signe $+$, et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sans symbole). On note $\mathbf{0}$ son vecteur nul.

On considère les vecteurs suivants de E :

$$u : x\mapsto 1, i : x\mapsto x, f = x\mapsto 1-x,$$
$$g : x\mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x<1/2 \\ 2 \text{ si } x\geq 1/2\end{cases}, h : x\mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x<1/2 \\ 0 \text{ si } x\geq 1/2\end{cases}$$

(1) Montrer que $f+i+((-1)\cdot u)=\mathbf{0}$.

(2) Montrer que $g+h=2\cdot u$.

Exercice 6.

Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites de nombres réels muni des lois usuelles $+$ et $\cdot$ (alors qu'on note l'addition dans $\mathbb{R}$ avec le signe $+$, et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sans symbole). On note $\mathbf{0}$ son vecteur nul.

On considère les vecteurs u, v, w de E, donnés par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad r_n=(-1)^n, s_n=1, t_n=n, u_n=1, v_n=\left\lfloor 1+\frac{n}{4}\right\rfloor, w_n=\sqrt{4n^2+4n+1}.$$

où $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ désigne la fonction partie entière.

(1) Soient les vecteurs $f=(3\cdot r)+(2\cdot s)$ et $g=2\cdot((3\cdot u)+((-2)\cdot t))$ de E.

Pour $n\in\mathbb{N}$, préciser, en détaillant les calculs (au moins trois égalités) la valeur de f_n et de g_n.

(2) A-t-on $u=v$?

(3) A-t-on $w=u+(2\times t)$?

2. Sous-espaces vectoriels

Exercice 7. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel que l'on précisera :

(1) l'ensemble des suites réelles convergentes,

(2) l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

(3) l'ensemble des triplets (z_1, z_2, z_3) de nombres complexes satisfaisant l'équation $2z_1 + 3z_2 - z_3 = 0$,

(4) l'ensemble des matrices anti-symétriques de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

(5) l'ensemble $\mathbb{C}_d[X]$ des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $d \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

(1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$

(2) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t \text{ et } y = z\}$

(3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$

(4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}$

(5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$

(6) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$

(7) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$

(8) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante }\}$

(9) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ converge vers } 0\}$

Exercice 9. Les ensembles suivants, munis des opérations habituelles, sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

(1) L'ensemble des fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}$,

(2) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant 0 pour limite en $+\infty$,

(3) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant 1 pour limite en $+\infty$,

(4) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 2 en l'origine,

(5) L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 2, 1)$,

(6) L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques de taille $n \in \mathbb{N}^*$,

(7) Le sous-ensemble des matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

3. Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 10. Par des considérations géométriques, répondez aux questions suivantes :

(1) Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont-elles supplémentaires ?

(2) Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

(3) À quelle condition un plan vectoriel et une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 11. Trouver des sous-espaces vectoriels distincts F et G de $\mathbb{R}^3$ tels que

(1) $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G \neq \{0\}$,

(2) $F + G \neq \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0\}$,

(3) $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0\}$,

(4) $F + G \neq \mathbb{R}^3$ et $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 12. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

(1) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

(2) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

(3) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

(4) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 13. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,\{(1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que F est un espace vectoriel. Trouver deux vecteurs u, v tels que $F = \mathrm{Vect}\{u, v\}$.

(2) Calculer $F \cap G$ et montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$. Que conclure ?

Exercice 14. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$.

(1) Quel est l'espace vectoriel F engendré par A et B ? Même question avec G engendré par C et D.

(2) Calculer $F \cap G$. Montrer que $F + G = M_2(\mathbb{R})$. Conclure.

Exercice 15. Soit $E = \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge } \big\}$. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 16. *(plus dur)* Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 17. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires (respectivement l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires) forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 18. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices symétriques de taille n (respectivement l'ensemble $\mathcal{AS}_n$ des matrices anti-symétriques de taille n) forme un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{k})$. Montrer que $M_n(\mathbf{k}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{AS}_n$.

4. Applications linéaires

Exercice 19. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & (x, y) \mapsto (2x + y, x - y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & (x, y, z) \mapsto (xy, x, y) \\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 & (x, y) \mapsto (y, 0, x - 7y, x + y) \\ f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 & P \mapsto \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Lorsque c'est le cas, déterminer leur noyau ainsi que leur image. Sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

Exercice 20. *(plus dur)* Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker f$ est stable par g, c'est-à-dire que l'image de $\ker f$ par g est inclus dans $\ker f$. Montrer de même que $\operatorname{Im} f$ est stable par g.