Module AG2
Feuille d'exercices n°4

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1. Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. Faire un dessin pour illustrer toutes les propriétés faisant de $\mathbb{R}^2$ un espace vectoriel.

Exercice 2. (1) Déterminer les solutions du système linéaire $\begin{cases} 3x - y &= 3 \\ 5x + 2y &= 16 \end{cases}$.

(2) Représentez graphiquement ce système comme intersection de droites dans le plan.
(3) Récrivez ce système comme combinaison linéaire de deux vecteurs. Faites un dessin.

Exercice 3. Soient $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, -2, 3, -4)$, $w_1 = (x, 1, y, 1)$ et $w_2 = (x, 1, 1, y)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, pour x et y des réels. Peut-on trouver x et y tels que $w_1 \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$? Et tel que $w_2 \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Exercice 4. Soient $v_1 = (2, 3, -1)$, $v_2 = (1, -1, -2)$, $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{w_1, w_2\}$ sont égaux.

Exercice 5. Soient $v_1 = (0, 1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2, -1)$, $v_3 = (3, 2, 2, -1)$, $v_4 = (0, 0, 1, 0)$, $v_5 = (0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

(1) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$.
(2) $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}$.
(3) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2, v_3, v_4\} = \mathrm{Vect}\{v_2\}$.
(4) $\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\} \cap \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \{0\}$.

2. Sous-Espaces Vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^4$, indiquer parmi les sous-ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :
$E_1 = \{(x, y, z, t) | x = 0\}$,
$E_2 = \{(x, y, z, t) | y + t = 2\}$,
$E_3 = \{(x, y, z, t) | 3x + 2y + t = 0\}$,
$E_4 = \{(x, y, z, t) | x + y = y + z = z + t = t + x\}$,
$E_5 = \{(x, y, z, t) | xy = 0\}$.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$, indiquer parmi les sous-ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :
$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,| 3x + 2y + 5z = 0\}$,
$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,| x + 2y - z = 3\}$,
$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,| y + z = 5 \text{ et } x = z\}$,
$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,| x + 2y + z = 0 \text{ et } 3x + 2y - z = 0\}$,
$G_1 = \{(u, 3u, 5u), u \in \mathbb{R})\}$,
$G_2 = \{(2 + v, 3v, 1 - v), v \in \mathbb{R}\}$,
$G_3 = \{(u + v, 3u + 2v, u - v + 5), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$,
$G_4 = \{(3u - v, 2u + v, u + v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.
Caractériser géométriquement ces sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Trouver tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (on donnera leur dimension, leur interprétation géométrique et le nombre d'équations qui les caractérisent).

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les vecteurs $a_1 = (1, 2, 3)$ et $a_2 = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $b_1 = (1, 0, 1)$ et $b_2 = (0, 1, 1)$:

(1) en écrivant b_1 et b_2 comme combinaisons linéaires de a_1 et de a_2.

(2) en donnant une équation qui caractérise le sous-espace vectoriel engendré par a_1 et a_2.

Exercice 10. On considère les sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 définis par :
$V_1 = \mathrm{Vect}\{(2,3,-1),(1,-1,-2),(1,9,4)\}$ et $V_2 = \mathrm{Vect}\{(3,7,0),(5,0,-7)\}$.

(1) Peut-on affirmer que $V_1 \subseteq V_2$?
(2) Peut-on affirmer que $V_2 \subseteq V_1$?
(3) Calculer $\dim V_1$ et $\dim V_2$ et donnez une description géométrique des sous-espaces V_1 et V_2.

Exercice 11. *(plus dur)* La partie de $\mathbb{R}^n$ formée par les vecteurs ayant pour 1ère, 2ème, ..., n-ième composante des nombres en progression arithmétique est-elle un sous-espace de $\mathbb{R}^n$? Même question en remplaçant "arithmétique" par "géométrique".

Exercice 12. Pour chacun des sous-ensembles suivants, dites s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel ou non ; lorsqu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel, calculez-en la dimension. (Justifiez vos réponses.)

(1) $E_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 - x_2^2 = 0\}$,
(2) $E_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 = 0\}$,
(3) $E_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$,
(4) $E_4 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 + x_2x_3 + x_3^2 = 0\}$,
(5) $E_5 = \{(a+b, 2a-b, 3a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$.

3. Dépendance linéaire et bases

Exercice 13. Vérifier que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et donner une base pour chacun d'eux :
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\, | x + 2y + 2z = 0\}$,
$E_2 = \{(\lambda+\mu, \lambda-\mu, \lambda+\mu) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$,
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\, | y + z = 0 \text{ et } x = 0\}$,
$E_4 = \{(u, 2u, u) | u \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 14. Soient $a = (1,-1,1)$, $b = (0,-1,2)$ et $c = (1,-2,3)$ trois éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que (a,b,c) est un système lié.
(2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (a,b,c). Donner une base de F.
(3) Soit $G = \{(x,y,z) | x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
(4) Montrer que $F = G$.

Exercice 15. Vérifier que les vecteurs : $a_1 = (-1,1,1)$, $a_2 = (1,-1,1)$, $a_3 = (1,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de $b = (2,-3,-1)$ dans la base (a_1,a_2,a_3).

Exercice 16. Vérifier que les vecteurs : $a_1 = (1,2,-1,-2)$, $a_2 = (2,3,0,-1)$, $a_3 = (1,3,-1,0)$, $a_4 = (1,2,1,4)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$. Calculer les coordonnées du vecteur $b = (7,14,-1,2)$ dans la base (a_1,a_2,a_3,a_4).

Exercice 17. Dans $\mathbb{R}^4$, décomposer les vecteurs : $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (3,1,-2,-1)$, $a_3 = (0,0,1,1)$ dans la base formée par $b_1 = (-1,1,1,1)$, $b_2 = (1,2,1,2)$, $b_3 = (1,3,2,4)$, $b_4 = (1,3,1,2)$.

Exercice 18. (1) Déterminer une équation définissant le sous-espace vectoriel E_1 de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $a_1 = (1,2,0,1)$, $a_2 = (2,3,0,3)$ et $a_3 = (3,2,1,2)$.
(2) Déterminer deux équations définissant le sous-espace vectoriel E_2 de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $b_1 = (2,-1,4,0)$ et $b_2 = (-1,0,-3,4)$.

Exercice 19. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, étudier les systèmes formés des vecteurs suivants :

(1) $a_1 = (1,2,2,1)$, $a_2 = (5,6,6,5)$, $a_3 = (-1,-3,4,0)$, $a_4 = (0,4,-3,-1)$
(2) $b_1 = (1,2,5,-1)$, $b_2 = (3,6,5,-6)$, $b_3 = (2,4,0,-2)$
Donner, s'il en existe, une relation linéaire non triviale entre ces vecteurs.

Exercice 20. (1) Les vecteurs suivants forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$? Sinon, donner la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.
$a_1 = (1,0,0,1)$ $a_2 = (0,1,0,0)$ $a_3 = (1,1,1,1)$ $a_4 = (1,1,1,0)$
(2) Même question pour : $a_1 = (1,1,2,1)$ $a_2 = (1,0,0,2)$ $a_3 = (2,3,4,3)$ $a_4 = (0,3,2,1)$.

Exercice 21. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^5$ sont-ils linéairement indépendants ? Sinon, déterminer le rang du système (a_1, a_2, a_3, a_4).
$a_1 = (1,0,0,2,5)$ $a_2 = (0,1,0,3,4)$ $a_3 = (0,0,1,4,7)$ $a_4 = (2,-3,4,11,12)$.

Exercice 22. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^6$ sont-ils linéairements indépendants ?
$a_1 = (1,0,0,1,0,0)$, $a_2 = (0,1,0,-2,1,0)$, $a_3 = (0,0,1,-1,-2,1)$, $a_4 = (-1,0,0,2,-1,-2)$, $a_5 = (0,-1,0,0,2,-1)$, $a_6 = (0,0,-1,0,0,2)$.

Exercice 23. (1) Les vecteurs suivants engendrent-ils $\mathbb{R}^4$?
$a_1 = (1,3,2,-1)$ $a_2 = (-2,2,3,2)$ $a_3 = (0,8,7,0)$ $a_4 = (3,1,2,4)$ $a_5 = (-4,4,3,-3)$
(2) Même question pour : $b_1 = (1,2,3,4)$ $b_2 = (2,3,4,5)$ $b_3 = (3,4,5,6)$ $b_4 = (4,5,6,7)$ $b_5 = (5,6,7,8)$
(3) Sinon, caractériser les sous-espaces engendrés par ces vecteurs par une base et une (des) équation(s).

Exercice 24. Dans $\mathbb{R}^5$, déterminer une base du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs : $a_1 = (1,2,-4,3,1)$ $a_2 = (2,5,-3,4,8)$ $a_3 = (6,17,-7,10,22)$ $a_4 = (1,3,-3,2,0)$.

Exercice 25. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et un réel α. Déterminer suivant les valeurs de α le rang du système (a,b,c) lorsque : $a = (1,1,\alpha)$, $b = (1,\alpha,1)$, $c = (\alpha,1,1)$.

Exercice 26. Déterminer les réels λ et μ pour que les vecteurs suivants soient dépendants. Préciser la relation de la dépendance.
$a_1 = (3,-2,-1,3)$, $a_2 = (1,0,2,4)$, $a_3 = (1,-3,\lambda,\mu)$.

Exercice 27. Montrer que dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $a_1 = (1,0,1,0)$, $a_2 = (0,1,0,1)$, $a_3 = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\alpha \neq \gamma$ ou $\beta \neq \delta$.

Exercice 28. (1) Déterminer une base du sous-espace E de $\mathbb{R}^4$ décrit par :
$$E = \{(x,y,z,t) | x = y - 3z \text{ et } z = 2t\}$$
Compléter cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
(2) Même question pour : $F = \{(x,y,z,t) | x + y = y + z = z + t = t + x\}$

Exercice 29. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dont une partie est constituée par :
$a = (2,-2,3,1)$ et $b = (-1,4,-6,-2)$.

Exercice 30. Dans $\mathbb{R}^n$, on considère les vecteurs suivants : $a_1 = (1,1,0,\cdots,0)$, $a_2 = (0,1,1,0,\cdots,0)$,..., $a_{n-1} = (0,\cdots,0,1,1)$, $a_n = (1,0,\cdots,0,1)$. Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ? Dans le cas contraire, donner la (les) relation(s) de dépendance. On pourra commencer par étudier les cas $n = 3$ et $n = 4$.

4. Cas complexe...

Exercice 31. Dans $\mathbb{C}^3$, vérifier que les vecteurs : $a_1 = (1,-1,i)$, $a_2 = (1,-1,1)$, $a_3 = (i,1,-1)$ sont linéairement indépendants et calculer les coordonnées du vecteur $b = (1+i, 1-i, i)$ dans la base (a_1, a_2, a_3).

Exercice 32. Dans $\mathbb{C}^3$, on considère les vecteurs : $a_1 = (1+i, 1+i, 1-i)$ $a_2 = (i, -i, -1-i)$ $a_3 = (1-i, 1-i, 1+i)$ $a_4 = (1,1,1)$ $a_5 = (1-2i, 1, 0)$.
(1) Vérifier que (a_1, a_2, a_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.
(2) Donner les coordonnées de a_4 dans la base (a_1, a_2, a_3).
(3) Vérifier que (a_1, a_2, a_5) est un système lié. Donner une équation du plan engendré par ces vecteurs.

Exercice 33. Montrer que dans $\mathbb{C}^4$, les vecteurs suivants forment un système lié et donner une relation linéaire non triviale entre ces vecteurs. $a_1 = (1, i, 1+i, -i)$ $a_2 = (-i, 0, 2-i, 1+i)$ $a_3 = (0,-1,0,1)$ $a_4 = (3i, -2-i, 3i-5, -i)$.

5. Applications linéaires

Exercice 34. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire associée. Calculer et dessiner l'image par f de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et plus généralement de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dessiner l'image par f du carré de sommets $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dessiner l'image par f du cercle inscrit dans ce carré.

Exercice 35. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire associée. Calculer l'image par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et plus généralement d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 36. On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose aussi $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer l'image par T du vecteur v.
(2) Quelle est l'image par T d'un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$?
(3) Quelle est la matrice de T ?
(4) Déterminer tous les vecteurs x de $\mathbb{R}^2$ tels que $T(x) = w$.

Exercice 37. Déterminer la matrice A de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 38. Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Quelle est la matrice de l'application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $T(v_1) = 2v_1$ et $T(v_2) = 3v_2$?

Exercice 39. Écrire la matrice de la rotation du plan d'angle $\pi/4$ centrée à l'origine. Faire de même dans l'espace avec la rotation d'angle $\pi/4$ d'axe (Ox).

Exercice 40. Écrire la matrice de la réflexion du plan par rapport à la droite d'équation $y = -x$. Faire de même dans l'espace avec la réflexion par rapport au plan d'équation $y = -x$.

Exercice 41. Soit f la réflexion du plan par rapport à l'axe (Ox) et soit g la rotation d'angle $2\pi/3$ centrée à l'origine. Calculer la matrice de $f \circ g$. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse. Interpréter géométriquement. Même question avec $g \circ f$.

Exercice 42. Soit f la projection orthogonale de l'espace sur le plan (Oxz) et soit g la rotation d'angle $\pi/2$ d'axe (Oy). Calculer la matrice de $f \circ g$. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse. Interpréter géométriquement. Même question avec $g \circ f$.