Université de Rennes 1 L1 2018-2019

Module AG2
Feuille d'exercices n°3

Opérations sur les Matrices

1. Somme et produit

Exercice 1. Calculer la somme $A_1 + A_2$ des matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Même question avec : $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient A et B deux matrices de même taille. Montrer que si $A + B = A$, alors B est la matrice nulle.

Exercice 4. Que vaut $0 \cdot A$? Et $1 \cdot A$? Justifier l'affirmation $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$. Idem avec $nA = A + \cdots + A$ (n occurences de A).

Exercice 5. Calculer le produit A_1A_2 des matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Peut-on effectuer le produit A_2A_1 ?

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Quels produits sont possibles ? Les calculer !

Exercice 7. Calculer les produits A_1A_2 et A_2A_1 des matrices

$a) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b) A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Vérifier que $(AB)C = A(BC)$ pour les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, B^2, AB et BA.

Exercice 10. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^4 = I$ et $B^3 = I$, mais que $(AB)^{12} \neq I$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer, si c'est possible, des matrices B et B' telles que $BA = I_2$ et $AB' = I_3$, où I_2 et I_3 désignent les matrices unités de $M_2(\mathbb{R})$ et de $M_3(\mathbb{R})$ respectivement.
Puissances

Exercice 12. Calculer les puissances successives de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^p et B^p pour tout entier naturel p. Montrer que $AB = BA$. Calculer $(A + B)^p$.

Exercice 14. Calculer C^4, et en déduire C^n pour $n \in \mathbb{N}^*$, C^{-1} et $(C^2)^{-1}$, pour la matrice
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3. Déterminer A^n par récurrence ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. Inverse

Exercice 16. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^{-1}, B^{-1}, (AB)^{-1}, (BA)^{-1}, A^{-2}$.

Exercice 17. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)^{-1}$.

Exercice 18. Calculer l'inverse des matrices suivantes : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1-i \\ 2i & -1+i & -1+i \\ -2i & -1-i & -1-i \end{pmatrix}$, $\quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$,
$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 19. Dans $M_2(\mathbb{C})$, on considère les matrices $J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances successives de J et de K. En déduire que J et K sont inversibles et donner leurs inverses.

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^4 = A$, mais que $A^3 \neq I$ où I est la matrice unité de $M_4(\mathbb{R})$. En déduire si la matrice A est inversible ou non ?

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A - A^2$. Sans calculs, en déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 22. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - A^2 + 4A + 6I = 0$, où I désigne la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 23. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer les puissances successives de J. La matrice J est-elle inversible ?

Exercice 24. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A(A-I)(A-2I) = 0$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 25. Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $(B-I)(B+I)(B-2I)$. La matrice $C = B - 2I$ est-elle inversible ?

3. Rang et système linéaires

Exercice 26. (1) Donner la définition du rang d'une matrice.

(2) Calculer la forme réduite échelonnée suivant les lignes de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Expliquez brièvement toutes vos étapes.

(3) Quel est le rang de A ?

Exercice 27. (1) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer la forme réduite échelonnée suivant les lignes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1-4a \\ 1 & 2 & 4 & 2-6a \\ 3 & 2 & 8 & 1-7a \end{pmatrix}$$

Expliquez les étapes du calcul. Discutez suivant les valeurs du paramètre a. Donner le rang.

(2) En déduire la résolution du système linéaire $\begin{cases} x + y + 3z &= 1-4a \\ x + 2y + 4z &= 2-6a \\ 3x + 2y + 8z &= 1-7a \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre a.

Exercice 28. (1) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer la forme réduite échelonnée suivant les lignes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & a+4 \\ 2 & 4 & 10 & 5a+21 \\ 5 & 4 & 13 & 3a+12 \end{pmatrix}$$

Expliquez les étapes du calcul. Discutez suivant les valeurs du paramètre a. Donner le rang.

(2) En déduire la résolution du système linéaire $\begin{cases} x + y + 3z &= a+4 \\ 2x + 4y + 10z &= 5a+21 \\ 5x + 4y + 13z &= 3a+12 \end{cases}$ suivant les valeurs du paramètre a.