Université de Rennes 1 2018-2019

L1, Module AG2
Feuille d'exercices n°2

Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1. Sur $\mathbb{R}$, résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants, en utilisant la méthode du pivot :

a) $\begin{cases} x+2y &= 8 \\ 3x-4y &= 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y &= 10 \\ 2x-2y &= -4 \\ 3x+5y &= 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y &= 7 \\ 3x+2y &= 12 \\ 4x-3y &= 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+3z &= 6 \\ 2x-3y+2z &= 14 \\ 3x+y-z &= -2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ 2x-y+2z &= 3 \\ x+4y-5z &= 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+z &= 4 \\ 2x+y+z &= 4 \\ x+5y-z &= 2 \end{cases}$

Exercice 2. Même question pour :

a) $\begin{cases} -2x+y-z-t &= -1 \\ 2x+2y-2t &= 1 \\ -2x-y-z-2t &= 1 \\ -2x+y-t &= -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+z+t &= 2 \\ x-t &= 4 \\ y+t &= -1 \\ y+z-t &= 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+z+t &= 1 \\ 3x+2y+2t &= 3 \\ x+y+z &= -1 \\ -x+y+z-t &= 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y+3z+4t &= 30 \\ 2x-3y+5z-2t &= 3 \\ 3x+4y-2z-t &= 1 \\ 4x-y+6z-3t &= 8 \end{cases}$

Exercice 3. Même question pour :

a) $\begin{cases} 2x+y+z+t &= 3 \\ x+2y+z+t &= 1 \\ x+y+2z+t &= 2 \\ x+y+z+2t &= 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t &= 3 \\ 6x+8y+2z+5t &= 7 \\ 9x+12y+3z+10t &= 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+2z-5t &= 3 \\ 2x+5y-z-9t &= -3 \\ 2x+y-z+3t &= -11 \\ x-3y+2z+7t &= -5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y+3z+4t+5u &= 6 \\ x+3y+5z+7t+4u &= 13 \\ x+4y+7z+10t+3u &= 20 \\ x+2y+4z+6t+8u &= 13 \end{cases}$

Exercice 4. Sur $\mathbb{C}$, résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants, en utilisant la méthode du pivot :

a) $\begin{cases} ix-(1-i)y-(1-i)z &= i \\ -ix-(1+i)y-(1+i)z &= -i \\ (1+i)y+(1-i)z &= 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+iz &= 1+i \\ -x-y+z &= 1-i \\ ix+y-z &= i \end{cases}$

c) $\begin{cases} (1+i)x+iy+(1-i)z &= 1-2i \\ (1+i)x-iy+(1-i)z &= 1 \\ (1-i)x-(1+i)y+(1+i)z &= 0 \end{cases}$

Exercice 5. Discuter et résoudre suivant les valeurs du paramètre réel m les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+y+z &= m+1 \\ mx+y+(m-1)z &= m \\ x+my+z &= 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+m)x+y+z &= 2 \\ x+y+(1-m)z &= 1+m \\ x+(1-m)y+z &= 1-m \end{cases}$

Exercice 6. Discuter et résoudre suivant les valeurs du paramètre complexe m le système suivant :

$$\begin{cases} x - my + m^2 z & = m \\ mx - m^2 y + mz & = 1 \\ mx + y - m^3 z & = 1 \end{cases}$$

Exercice 7. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + by + az & = 1 \\ x + aby + z & = b \\ ax + by + z & = 1 \end{cases}$$

(1) Pour quelles valeurs de a et de b le système admet-il une solution unique ?
(2) Dans ce cas, déterminer cette solution.
(3) Discuter et résoudre le système dans le cas contraire.

Exercice 8. Soient a, b, c et d des paramètres réels. On considère le système d'équations linéaires suivant : $\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ ax + by + cz & = d \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z & = d^2 \end{cases}$

(1) Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c le système admet-il une solution unique ?
(2) Dans ce cas, déterminer cette solution.
(3) Discuter et résoudre le système dans le cas contraire.

Exercice 9. *(plus dur)* Soient $a_1, \ldots, a_n$ des paramètres réels. On considère le système de n équations à n inconnues donné par :
$x_i + x_{i+1} = 2a_i$, pour tout i de $\{1, \cdots, n-1\}$ et $x_n + x_1 = 2a_n$.

(1) Résoudre le système pour $n = 3$ et $n = 4$.
(2) Montrer que si n est impair, le système admet une unique solution que l'on calculera.
(3) Donner les conditions sur les a_i pour que le système admette des solutions lorsque n est pair, et les déterminer.

Exercice 10. *(plus dur)* On considère le système de n équations à n inconnues donné par :
$x_1 + \cdots + x_{i-1} + \lambda x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n = a_i$, pour tout i de $\{1, \cdots, n-1\}$
$\lambda, a_1, \cdots, a_n$ étant des paramètres.

(1) a) Pour quelles valeurs du paramètre λ le système admet-il une solution unique ? Calculer alors celle-ci (on pourra se servir de $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$).
(2) b) Sinon, quelles sont les conditions sur $a_1, \cdots, a_n$ pour que le système admette des solutions ?

Exercice 11. Trouver l'unique polynôme à coefficients réels $P(X)$ de degré au plus trois vérifiant : $P(1) = 0$, $P(-1) = -4$, $P(2) = 5$ et $P(-2) = -15$.

Exercice 12. Trouver le polynôme P de degré 3 tel que $P(1) = 1$, $P(2) = 5$, $P'(1) = 2$ et $P'(2) = 9$, où P' est le polynôme dérivé de P.

Exercice 13. Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à trois, on ait :

$$\int_2^4 P(x)\, dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$