

L1, Module AG2

Feuille d'exercices n°1

Droites du plan, droites et plans de l'espace

1. DROITES DU PLAN

Exercice 1. Soit P un plan muni d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les points et les vecteurs sont exprimés par leurs coordonnées dans \mathcal{R} .

- (1) Donner un vecteur directeur, la pente, une représentation paramétrique et une équation cartésienne des droites (AB) suivantes :
 - (a) $A(2, 3)$ et $B(-1, 4)$
 - (b) $A(-7, -2)$ et $B(-2, -5)$
 - (c) $A(3, 3)$ et $B(3, 6)$
- (2) Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne des droites passant par A et dirigées par \vec{v} avec :
 - (a) $A(2, 1)$ et $\vec{v}(-3, -1)$
 - (b) $A(0, 1)$ et $\vec{v}(1, 2)$
 - (c) $A(-1, 1)$ et $\vec{v}(1, 0)$
- (3) Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne des droites définies comme suit :
 - (a) passant par le point $(0, 4)$ et de pente 3,
 - (b) passant par le point $(2, -3)$ et parallèle à l'axe des x ,
 - (c) passant par le point $(-2, 5)$ et parallèle à la droite $D : 8x + 4y = 3$.

Exercice 2. On considère le triangle ABC dont les côtés sont supportés par les droites d'équation $(AB) : x + 2y = 3$, $(AC) : x + y = 2$, $(BC) : 2x + 3y = 4$.

- (1) Donner les coordonnées des points A, B, C .
- (2) Donner les coordonnées des milieux A', B', C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
- (3) Donner une équation cartésienne de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

2. DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

Exercice 3. (1) Trouver une équation cartésienne du plan P défini par les éléments suivants.

- (a) A, B et C sont des points de P
 - (i) $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$ et $C(0, 1, 0)$.
 - (ii) $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$ et $C(-1, 2, 4)$.
- (b) A est un point de P , \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs directeurs de P
 - (i) $A(1, 2, 1)$, $\vec{u}(4, 0, 3)$ et $\vec{v}(1, 3, -1)$.
 - (ii) $A(1, 0, 2)$, $\vec{u}(2, -1, 3)$ et $\vec{v}(-1, 4, 5)$.
- (c) A est un point de P , D est une droite contenue dans P
 - (i) $A(0, 0, 0)$ et $D : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$

$$(ii) A(1, 1, 0) \text{ et } D : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

(d) D et D' sont des droites contenues dans P

$$(i) D : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \text{ et } D' : \begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(ii) D : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \text{ et } D' : \begin{cases} 2x + y - 3z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 - s - t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + 3s' - t' \\ y = 3 + 3s' + t' \\ z = 1 - 2s' \end{cases}$$

Exercice 4. Les plans suivants sont-ils parallèles ou sécants ? Dans ce dernier cas, donner un vecteur directeur de la droite $D = P \cap P'$.

- (1) $P : 5x - y - 1 = 0$ et $P' : z = 3$.
- (2) $P : x + y + z + 1 = 0$ et $P' : 2x - y + 3z + 2 = 0$.
- (3) $P : 2x - z + 1 = 0$ et $P' : 4x - 3y + 2z + 5 = 0$.
- (4) $P : 4x - 6y + 8z - 1 = 0$ et $P' : -6x + 12y - 9z + 11 = 0$.

Exercice 5. Quelle est la nature de l'intersection des trois plans suivants ? Si c'est un point en donner les coordonnées, si c'est une droite en donner un vecteur directeur.

- (1) $P : z = 1$, $P' : x - y - 2 = 0$ et $P'' : 4x - 2y + z + 2 = 0$.
- (2) $P : 4x - 2y + 3z + 5 = 0$, $P' : 3x + y - z + 2 = 0$ et $P'' : x - y + z + 1 = 0$.
- (3) $P : 4x - 2y + 10z - 4 = 0$, $P' : -10x + 5y - 25z + 13 = 0$ et $P'' : x + y - z + 1 = 0$.
- (4) $P : 3x - y + 2z - 5 = 0$, $P' : x - y + 3z - 7 = 0$ et $P'' : 4x + 2y - z + 1 = 0$.
- (5) $P : x - y + 2z - 1 = 0$, $P' : 2x + y + z + 3 = 0$ et $P'' : x - 4y + 5z - 6 = 0$.
- (6) $P : x - y + 2z - 1 = 0$, $P' : 2x + y - z + 1 = 0$ et $P'' : x + 5y - 8z + 2 = 0$.

Exercice 6. Les droites suivantes sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Si elles sont sécantes donner leur point d'intersection et si elles sont parallèles donner un vecteur directeur.

- (1) $D : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$
- (2) $D : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants dire si la droite D et le plan P sont parallèles ou sécants. Donner alors leur point d'intersection.

- (1) $D : \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ et $P : 4x - 3y + 7z - 7 = 0$.
- (2) $D : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ et $P : -3x + 2y + 3z - 5 = 0$.