AG2, Corrigé du contrôle du 1er mars 2018 (durée 4h)

QCM

(1) b). En effet $347 \equiv 7$ [10] et $7^4 \equiv 1$ [10] d'où $7^{347} = (7^4)^{86} 7^3 \equiv 7^3$ [10] $\equiv 3$ [10].

(2) b). En effet le système est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} x + z + y & = m+1 \\ \quad z + (m-1)y & = -m \\ \quad (1-m)y & = -m^2 \end{cases}$$

qui admet une unique solution si $m \neq 1$, alors que pour $m = 1$ la troisième équation est incompatible.

(3) c). On peut appliquer la formule du binôme à $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En effet I_2 et N commutent.

(4) e). Faire le calcul !

(5) c). La méthode du pivot de Gauss conduit à trois lignes non nulles.

(6) d). C'est la seule équation linéaire homogène.

Vrai/Faux

Les justifications n'étaient pas demandées. Il est néanmoins souhaitable de savoir pourquoi les affirmations sont vraies ou fausses.

* *L'équation $7a \equiv 5\,(mod\,12)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$* : **Faux**.

Prendre $a = 11$ ou $a = -1$. Pour les trouver des solutions, on peut remarquer de 7 et 12 sont premiers entre eux, donc une équation de Bézout $7x + 12y = 1$ donne $7x \equiv 1\,(mod\,12)$. Il reste à prendre $a = 5x$ pour obtenir une solution.

* *Pour tout entier naturel n, $2n^2 - 20n + 79$ est premier* : **Faux**.

Si c'était vrai, ça se saurait ! Plus sérieusement, prendre $n = 79$: la valeur est alors

$$2 * 79 * 79 - 20 * 79 + 79 = 79 * (2 * 79 - 20 + 1) = 79 * 139,$$

qui n'est visiblement pas premier.

* *Pour tout entier n, 42 divise $n^7 - n$* : **Vrai**.

$42 = 7 \times 2 \times 3$ qui sont 2 à 2 premiers entre eux, il suffit donc de vérifier que $n^7 - n$ est divisible par 7,3 et 2. Pour 7, c'est littéralement le petit théorème de Fermat. Pour 2, il n'y a qu'à vérifier pour $n = 0$ et $n = 1$ qui sont les 2 congruences possibles modulo 2. Pour 3, il y a 3 valeurs à vérifier :

$$0^7 - 0 \equiv 0\,(mod\,3),\ 1^7 - 1 \equiv 0\,(mod\,3),\ 2^7 - 2 \equiv 0\,(mod\,3).$$

* *Soit $n = 221$. Le plus petit entier naturel p tel que np soit un carré est $p = 221$* : **Faux** (mais presque **Vrai** !)

Pour $p = 0$, $n \times 0 = 0 = 0^2$ est un carré, c'est donc faux. Néanmoins, ceux qui ont posé la question avait sans doute dans l'idée de parler d'entiers naturels non nuls; auquel cas $n = 221 = 13 \times 17$, p se décompose alors en produit de premiers $p_1 ... p_k$. Pour que np soit un carré, il faut que les premiers $13, 17$ apparaissent chacun deux fois dans le produit $13 \times 17 \times p_1 \times ... \times p_k$. Deux des p_i correspondent ainsi à 13 et 17, donc $p \geq 221$ nécéssairement. Et de fait, $p = 221$ convient.

Vu l'ambiguïté possible de la question (les entiers naturels incluent ou excluent 0 selon les définitions et les sources), les points ont été donné à tout le monde pour cette question.

* *Soit A une matrice non nulle de taille $n \times p$, et B,C de taille $p \times q$. Si $AB = AC$ alors $B = C$* : **Faux**.
Contre-exemple : $p = q = n = 2$, et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

* *Soit A une matrice non nulle de taille $n \times p$, et B,C de taille $p \times q$. Si $B \neq C$ alors $AB \neq AC$* : **Faux**.

C'est la proposition contraposée de la précédente : elle lui est logiquement équivalente.

Exercice 1

(1) La fonction f admet pour domaine de définition $\mathbb{R}$, et est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée donnée par : $f'(x) = 1 - 3x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$. Les points critiques sont les points où $f'(x)$ s'annule, soit $1/\sqrt{3}$ et $-1/\sqrt{3}$.
(2) L'équation de la tangente est donnée par : $y(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$ soit $y(x) = -11x + 16$. Le point d'intersection avec l'axe des x a pour coordonnées : $(16/11, 0)$
(3) Les points critiques sont connus : $1/\sqrt{3}$ et $-1/\sqrt{3}$. La dérivée f' est négative pour $x \leq -1/\sqrt{3}$ ou $x \geq 1/\sqrt{3}$, positive pour $x \in [-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$. Le tableau de variation montre donc que $-1/\sqrt{3}$ est un minimum local et $1/\sqrt{3}$ un maximum local. Comme cette fonction tend vers $+\infty$ si x tend vers $-\infty$ et qu'elle est impaire, ces points sont bien des extremum locaux et non globaux.
(4) Si on se restreint à l'intervalle $[-2, 2]$, l'étude précédente montre que -2 est un maximum global ($f(-2) = 6$) et 2 un minimum global ($f(2) = -6$). Les points critiques restant des extremum locaux ($f(1/\sqrt{3}) = -2/3\sqrt{3}$).
(5) La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$, continue (ne pas oublier !), $f(1) = 0$ et quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $-\infty$ donc c'est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]-\infty, 0]$.

Exercice 2

1. Inversons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow -L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

On obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

2. Si $AX = Y$, notons (p, q) la taille de la matrice X. Le produit d'une matrice $(3, 3)$ par une matrice (p, q) donne une matrice $(3, 1)$, donc $p = 3$ et $q = 1$. Enfin, si $AX = Y$ alors

$$X = A^{-1}AX = A^{-1}Y.$$

Le résultat s'obtient donc par produit matriciel :

$$X = \begin{pmatrix} a + c \\ a + b + 2c \\ b \end{pmatrix}.$$

Remarque : On peut aussi résoudre le système linéaire, mais cela consiste à refaire les *mêmes* opérations que durant l'inversion de la matrice.

3.

$$\begin{cases} (2 + \alpha)x + 3y + 3z &= 0 \\ 3x + (4 - \alpha)y + 5z &= 0 \\ x + y + (2 + \alpha)z &= 0 \end{cases}$$

3. On va réécrire le système en rendant muettes les variables x, y, z

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 + \alpha & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 - \alpha & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 + \alpha & 0 \end{array}\right).$$

Résolvons par la méthode du pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 + \alpha & 0 \\ 2 + \alpha & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 - \alpha & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 + \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 3 - (2 + \alpha)^2 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & -1 - 3\alpha & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - (2 + \alpha)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 + \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & -1 - 4\alpha - \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \alpha^2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

Remarques : Attention, on s'est bien gardé de multiplier une ligne par une quantité potentiellement nulle (opération du type $L_1 \leftarrow (2 + \alpha)L_1$ ou $L_1 \leftarrow \frac{1}{2+\alpha}L_1$), ou de diviser par une quantité potentiellement nulle : ce ne serait alors plus équivalent au système initial, voire n'aurait plus aucun sens. Par contre, l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - (2 + \alpha)L_1$ est légitime : ça préserve l'équivalence au système initial même si $\alpha = -2$.

On remarque que la dernière ligne est nulle si et seulement si $\alpha + \alpha^2 = \alpha(\alpha + 1) = 0$. Commençons par traiter ces deux cas.

<u>1er Cas:</u> $\alpha = 0$.

Dans ce cas, la système se réécrit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Paramétrons les solutions en fonction de la dernière variable z, c'est-à-dire écrivons

$$\begin{cases} x + y = -2z \\ y = z \end{cases},$$

on obtient immédiatement que le système a pour solutions

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -3z \\ z \\ z \end{pmatrix} \right\}_{z \in \mathbb{R}} = Vect \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>2ème Cas:</u> $\alpha = -1$.

Dans ce cas, la système se réécrit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Paramétrons les solutions en fonction de la dernière variable z, c'est-à-dire écrivons

$$\begin{cases} x + y = -z \\ y = -z \end{cases},$$

on obtient immédiatement que le système a pour solutions

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} \right\}_{z \in \mathbb{R}} = Vect \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Intéressons nous-maintenant aux autres cas. Si $\alpha = 1$, le terme $1 - \alpha$ s'annule et empêche la résolution unique. On va donc traiter ce cas séparément.

<u>3ème Cas:</u> $\alpha = 1$.

Dans ce cas, la système se réécrit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Les deux dernières équations sont équivalentes et expriment $z = 0$. On paramètre donc en fonction de y. Les solutions sont alors

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{y \in \mathbb{R}} = Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>4ème Cas:</u> $\alpha \neq -1, 0, 1$.

Le système est alors triangulaire avec diagonale non nulle. On peut donc "remonter" par substitution, on obtient successivement que $z = 0$, $y = 0$, puis $x = 0$. La solution est dans ce cas unique et est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

(1) En effectuant les produits de matrices on obtient

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 19 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 65 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que le deuxième coefficient de la première ligne est à chaque fois égal à la différence des deux premiers coefficients diagonaux.

(2) Nous allons montrer par récurrence sur n que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n est gale à

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on pose comme hypothèse de récurrence à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n suivante :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$ la propriété P_1 est vraie (et même P_2, P_3 et P_4 d'après la question précédente), la récurrence est donc initialisée. Supposons P_n, et calculons $A^{n+1} = A \times A^n$ en effectuant le produit de matrice, les coefficients de la matrice A^n étant donné par P_n. Ainsi

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & a & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

où $a = 2(3^n - 2^n) + 3^n$. Or $a = (2+1)3^n - 2^{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, ce qui démontre P_{n+1}.
Ainsi la propriété P_n est héréditaire à partir de $n = 1$, et elle est vraie pour $n = 1$, donc la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

(1) On pourrait se contenter de remarquer qu'une famille de quatre vecteurs dans un espace de dimension trois ne saurait être libre. En l'absence de ce résultat de cours, on utilise la méthode habituelle. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} xa_1 + ya_2 + za_3 + ta_4 = 0 &\iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 & L_1 \\ x + 3y + z + 2t = 0 & L_2 \\ 2x - y + 3t = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 & \\ y + t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -5y - 2z + t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 & \\ y + t = 0 & \\ -2z + 6t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = 3t \\ y = -t \\ x = -2y - z - t = -2t \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier, $(2, 1, -3, -1)$ est solution donc $2a_1 + a_2 - 3a_3 - a_4 = 0$. La famille (a_1, a_2, a_3, a_4) n'est donc pas libre.

(2) On cherche ici $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_5 = xa_2 + ya_3$. Cela revient à chercher un couple (x, y) de réels solution du système

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x + y = 13 \\ -x = -5 \end{cases} \quad \text{dont l'unique solution est } (x, y) = (5, -2).$$

On a donc : $a_5 = 5a_2 - 2a_3$.

(3a) On a $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,z=7x-5y\}=\{(x,y,7x-5y)\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. Par suite, $E=\{x(1,0,7)+y(0,1,-5)\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ et donc $E=\mathrm{Vect}\{(1,0,7),(0,1,-5)\}$. E est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
On pouvait aussi bien sûr revenir à la définition en vérifiant que E est une partie non vide de $\mathbb{R}^3$ stable par addition et par multiplication par un scalaire.

(3b) On a $7\times 1-5\times 1-2=0$ donc $a_1\in E$. De même $7\times 2-5\times 3-(-1)=0$ donc $a_2\in E$. Par suite $\mathrm{Vect}\{a_1,a_2\}\subseteq E$ (si un sous-espace vectoriel contient deux vecteurs, il contient toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs).
Pour conclure à l'égalité de ces sous-espaces, on peut remarquer qu'ils sont tous deux de dimension 2 (les vecteurs des familles génératrices exhibées sont clairement non proportionnels donc forment des familles libres).
En l'absence de ce résultat de cours, on peut montrer l'inclusion réciproque en vérifiant que $(1,0,7)$ et $(0,1,-5)$ sont combinaisons linéaires de a_1 et a_2. On trouve $(1,0,7)=3a_1-a_2$ et $(0,1,-5)=a_2-2a_1$.
Une troisième méthode consistait à chercher une équation du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{a_1,a_2\}$: soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
u\in\mathrm{Vect}\{a_1,a_2\} &\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ u=\alpha a_1+\beta a_2\\
&\iff \text{Le système } \begin{cases}\alpha+2\beta &=x\\ \alpha+3\beta &=y\\ 2\alpha-\beta &=z\end{cases} \text{ d'inconnu } (\alpha,\beta) \text{ a au moins une solution}\\
&\iff \begin{cases}\alpha+2\beta &=x\\ \beta &=y-x \quad L_2\leftarrow L_2-L_1\\ -5\beta &=z-2x \quad L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{cases} \text{ a au moins une solution}\\
&\iff \begin{cases}\alpha &=x-2(y-x)\\ \beta &=y-x\\ -5(y-x) &=z-2x\end{cases} \text{ a au moins une solution}\\
&\iff -5y+7x-z=0
\end{aligned}$$

Ainsi, les sous-espaces vectoriels E et $\mathrm{Vect}\{a_1,a_2\}$ ont même équation et sont donc égaux.