Université de Rennes 1 2017-2018

AG2, Contrôle du 1er mars 2018 (durée 4h)

Les notes de cours, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés.

NOM Prénom : Groupe de TD :

QCM :
Vrai/Faux :
Questions de cours : Note sur 60 :
Exercice 1 :
Exercice 2 :
Exercice 3 :
Exercice 4 :

Le sujet est composé d'un questionnaire à choix multiples, d'un exercice de type Vrai/Faux, de questions de cours et de quatre exercices. Les éventuels points négatifs obtenus au QCM et au Vrai/Faux seront comptabilisés dans la note finale. Pour les questions de cours et les quatre derniers exercices, la justesse et la clarté de la rédaction compteront pour une part importante dans l'évaluation.
Un barème indicatif est donné pour chaque exercice.

QCM (*sur 6 points*) : dans chacune des questions ci-dessous, entourer l'affirmation exacte.
Barème :

- 1 point par affirmation exacte entourée ;
- -1 point par affirmation fausse entourée ;
- 0 point en l'absence de réponse.

---

(1) Le chiffre des unités dans l'écriture décimale de 347^{347} est

a) 1 *b)* 3 *c)* 5 *d)* 7 *e)* 9

(2) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m le système suivant n'admet-il aucune solution ?

$$\begin{cases} x+y+z &= m+1 \\ mx+y+mz &= m \\ x+my+2z &= 1 \end{cases}$$

a) $m=0$ *b)* $m=1$ *c)* $m^2 \neq 1$ *d)* $m \neq 0$ *e)* $m \in \{0,1\}$

(3) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ élevée à la puissance 10 est égale à

a) $\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 1 & (-1)^{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ est égale à

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

(5) Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est égal à

a) 1 *b)*2 *c)*3 *d)*4 *e)*5

(6) Laquelle des équations suivantes définit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

a) $x+y+z+1=0$ *b)* $xy+yz+zx=0$ *c)* $x+y+z=3$ *d)* $2x-y+3z=0$ *e)* $x+y \leqslant z$

Vrai/Faux (*sur 12 points*) : pour chacune des affirmations suivantes, entourer V si elle est vraie ou F si elle est fausse.

Barème :

- 2 points par bonne réponse ;
- -1 point par mauvaise réponse ;
- 0 point en l'absence de réponse.

V ou F (1) L'équation $7a \equiv 5 \pmod{12}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

V ou F (2) Pour tout entier naturel n, le nombre $2n^2 - 20n + 79$ est premier.

V ou F (3) Pour tout entier n, 42 divise $n^7 - n$.

V ou F (4) Soit $n = 221$. Le plus petit entier naturel p tel que np soit un carré est $p = 221$.

V ou F (5) Soit A une matrice non nulle de taille $n \times p$ et B, C des matrices de taille $p \times q$. Si $AB = AC$, alors $B = C$.

V ou F (6) Soit A une matrice non nulle de taille $n \times p$ et B, C des matrices de taille $p \times q$. Si $B \neq C$, alors $AB \neq AC$.

Questions de cours (*sur 12 points*) :

(1) Donner la définition d'un nombre premier.

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. Supposons $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$. Démontrer que $ac \equiv bd \pmod{n}$.

(3) Donner la définition d'une matrice inversible.

(4) Soient A et B des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ inversibles. Démontrer que la matrice AB est inversible, et donner son inverse.

(5) Donner la définition d'une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(6) Donner, avec justification, deux familles génératrices de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1. (*sur 8 points*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - x^3$.

(1) Déterminer les points critiques de f.

(2) Donner une équation de la tangente au graphe de f au point $(2, f(2))$ et déterminer son intersection avec l'axe des x.

(3) Déterminer, s'ils existent, les maximum et minimum locaux et globaux de la fonction f et, s'ils n'existent pas, expliquer pourquoi.

(4) Considérons maintenant la fonction f restreinte à l'intervalle $[-2, 2]$. Déterminer, s'ils existent, les maximum et minimum locaux et globaux de la fonction f sur $[-2, 2]$ et, s'ils n'existent pas, expliquer pourquoi.

(5) Montrer que la fonction f restreinte à $[1, +\infty[$ est une bijection entre $[1, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$.

Exercice 2. (*sur 7 points*)

(1) Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Est-ce que A est inversible ? Si oui, calculer son inverse.

(2) Soit Y le vecteur
$$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$
où a, b, c sont des paramètres réels fixés. On considère l'équation matricielle $AX = Y$ d'inconnue une matrice X.

Quelle est la taille de la matrice X ? Résoudre cette équation.

(3) Soit α un paramètre réel. Décrire, en fonction de la valeur du paramètre α, l'ensemble des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation :
$$\begin{cases} (2+\alpha)x + 3y + 3z & = 0 \\ 3x + (4-\alpha)y + 5z & = 0 \\ x + y + (2+\alpha)z & = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. (*sur 8 points*)
On considère la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer A^2, A^3, A^4.
(2) En déduire, par récurrence, l'expression de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. (*sur 7 points*)
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:
$$a_1 = (1,1,2) \qquad a_2 = (2,3,-1) \qquad a_3 = (1,1,0) \qquad a_4 = (1,2,3) \qquad a_5 = (8,13,-5)$$

(1) La famille (a_1, a_2, a_3, a_4) est-elle libre ?
(2) Écrire a_5 comme combinaison linéraire de a_2 et a_3.
(3) Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 7x - 5y - z = 0\}$.
  (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
  (b) Montrer que $\mathrm{Vect}\{a_1, a_2\} = E$.
