Chapitre IV

Les bibliothèques

THER et ELAS

Nous continuons à utiliser Modulef sous forme conversationnelle. Jusqu'à présent nous avons résolu des problèmes de la thermique avec des éléments finis $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Nous allons traiter des problèmes d'élasticité.

Nous aborderons:

1. le problème de la thermique avec les formulations variationnelles en température et mixtes
2. les problèmes de l'élasticité linéaire en dimension 2 et en dimension 3.

IV.1. Introduction

NOTA BENE: en général

1. *en thermique*: simple précision, un fonction scalaire inconnue.
2. *en élasticité*: double précision, un champ vectoriel inconnu.

Nous nous limitons aux problèmes de la thermique et de l'élasticité. De plus, nous ne traiterons que les formulations le plus couramment utilisées.

Définition. Un élément fini dans Modulef est caractérisé par:

• une classe de problèmes: thermique, fluide, élasticité, électromagnétisme,. . . ,

• une figure géométrique: triangle, . . . ,

• une formulation variationnelle permettant de définir les inconnues (variationnelles): température, flux de chaleur, déplacement,. . . ,

• une interpolation des inconnues variationnelles qui donne les inconnues discrètes,

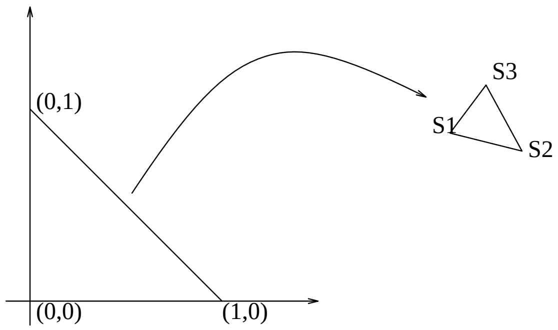
• des formules d'intégration numérique.

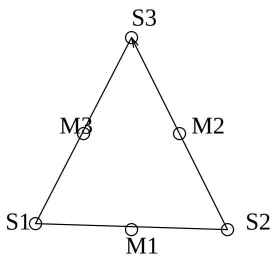
Exemple. Analysons l'élément bidimensionnel: TRIA 2P2D.

• Il s'agit d'un élément de la THERmique.

• L'application de l'élément de référence sur l'élément courant est donnée par

$$F_{\hat{T}}(\hat{x}, \hat{y}) = (1 - \hat{x} - \hat{y})S_1 + \hat{x}S_2 + \hat{y}S_3$$





• L'inconnue est u la température.

• L'interpolation est de type Lagrange de degré 2. Les inconnues sont les valeurs aux nœuds et nous avons 6 nœuds par triangle.

• La formule d'intégration numérique est la formule des milieux de côtés,

$$\int_{\hat{T}} f(\hat{x})d\hat{x} \simeq \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} f(\hat{M}_i).$$

IV.2. Le problème de la thermique

1. Problème de la thermique (E.D.P.)

Trouver la fonction $u : [0,T] \times \Omega \to \mathcal{R}$ telle que

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f^{\Omega} \ (0,T) \times \Omega,$$

$$\sigma = \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n, x_i) \text{ sur } (0,T) \times \Gamma_1,$$

$$\sigma + gu = f^{\Gamma} \quad \text{sur } (0,T) \times \Gamma_1,$$

$$u = u_0 \quad \text{sur } (0,T) \times \Gamma_0,$$

$$u(0,x) = \overline{u_0}(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

On peut rajouter un terme $a_0 u$ dans l'équation différentielle, avec les changements appropriés pour la suite.

Ici les champs sont

- u: la température,

- σ: le flux de température le long d'une surface (ligne) de normale n,

- k: conductivité thermique,

- ρ: chaleur massique,

- f^Ω: source de chaleur volumique,

- g: coefficient de transfert de chaleur,

- f^Γ: source de chaleur surfacique (linéique),

- u_0 et $\overline{u_0}$ température imposée.

2. Formulation en température

Trouver la fonction $u(t,x) : (0,T) \times \Omega \to \mathcal{R}$ telle que pour toute fonction $v \in V \equiv \{v \in H^1(\Omega); v_{|\Gamma_0} = 0\}$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega v(x)\rho\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,dx \\
&+ \int_\Omega {}^t\{Dv(x)\}[K]\{Du(t,x)\}\,dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} v(x)gu(t,x)\,d\sigma = \int_\Omega v(x)f^\Omega\,dx \\
&\qquad\qquad + \int_{\Gamma_1} v(x)f^\Gamma\,d\sigma, \\
&\qquad u(t,x) = u_0(x) \quad x \in \Gamma_0, \\
&\qquad u(0,x) = \overline{u_0}(x) \quad x \in \Omega.
\end{aligned}
$$

N.B. À ce stade, nous n'avons rien précisé sur la discrétisation en temps. Nous pouvons travailler de deux façons: *écrire le problème non discrétisé en temps de manière à utiliser le programme EVOLXX* ou *discrétiser à la main.*

Prenons par exemple le schéma d'Euler implicite. On pose

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x) \simeq \frac{u(t_n, x) - u(t_{n-1}, x)}{\Delta t}.$$

L'équation devient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega v(x)\rho(t_n, x)u(t_n, x)\frac{1}{\Delta t}\,dx \\
&\quad + \int_\Omega {}^t\{Dv(x)\}[K(t_n, x)]\{Du(t_n, x)\}\,dx \\
&+ \int_{\Gamma_1} v(x)gu(t_n, x)\,d\sigma = \int_\Omega v(x)f^\Omega(t_n, x)\,dx \\
&\qquad + \int_{\Gamma_1} v(x)f^\Gamma(t_n, x)\,d\sigma \\
&\qquad + \int_\Omega v(x)\rho(t_n, x)u(t_{n-1}, x)\frac{1}{\Delta t}\,dx.
\end{aligned}$$

On peut alors résoudre pas à pas le problème évolutif. *Il ne s'agit certainement pas de la façon la plus intelligente de résoudre le problème.*

3. Formulation mixte du problème stationnaire

Posons

$$\vec{p} = K\vec{\nabla} u.$$

Alors pour toute fonction $v \in L^2(\Omega)$

$$-\int_\Omega \mathrm{div}\vec{p}\, v\, dx = \int_\Omega f^\Omega v\, dx$$

ou bien

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{p}\, v\, dx = -\int_\Omega f^\Omega v\, dx.$$

Prenons la première équation

$$\vec{p} = K\,\vec{\mathrm{grad}}\,u$$

ou bien

$$\vec{\mathrm{grad}}\,u = K^{-1}\vec{p}.$$

On définit l'espace fonctionnel

$$Q^0 = \{\vec{q}; \vec{q} \in H(\mathrm{div}, \Omega), \vec{q}.\vec{n} \in L^2(\partial\Omega),$$
$$\vec{q}.\vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N\}$$

Alors

$$\int_\Omega {}^t\vec{q} K^{-1} \vec{p}\, dx = \int_\Omega {}^t\vec{q}\, \vec{\mathrm{grad}} u\, dx.$$

Remarquons qu'ici nous avons subdivisé

$$\Gamma_1 = \Gamma_R + \Gamma_N.$$

Analysons le second membre de l'équation ci-dessus.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega {}^t\vec{q}\, \vec{\mathrm{grad}} u\, dx &= \int_\Omega \mathrm{div}(\vec{q}\, u)\, dx - \int_\Omega \mathrm{div}\vec{q}\, u\, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} {}^t\vec{q}\, u\, \vec{n}\, d\sigma - \int_\Omega \mathrm{div}\vec{q}\, u\, dx \\
&= \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_R \cup \Gamma_N} {}^t\vec{q}\, u\, \vec{n}\, d\sigma \\
&= \int_{\Gamma_0} {}^t\vec{q}\, \vec{n}\, u_0\, d\sigma + \int_{\Gamma_R} {}^t\vec{q}\, \vec{n} \left\{ \frac{f^\Gamma}{g} - \vec{p}\, \vec{n} \frac{1}{g} \right\} d\sigma.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\int_\Omega {}^t\vec{q}\,K^{-1}\,\vec{p}\,dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{g}({}^t\vec{q}\,\vec{n})({}^t\vec{p}\,\vec{n})\,d\sigma$$
$$+ \int_\Omega \mathrm{div}\vec{q}\,u\,dx$$
$$= \int_{\Gamma_0} {}^t\vec{q}\,\vec{n}\,u_0\,d\sigma + \int_{\Gamma_R}({}^t\vec{q}\,\vec{n})\frac{f^{\Gamma_R}}{g}d\sigma.$$

Nous définissons

$$Q^{f^{\Gamma_N}} = \{\vec{q};\vec{q}\in H(\mathrm{div},\Omega), \vec{q}.\vec{n}\in L^2(\partial\Omega),$$
$$\vec{q}.\vec{n} = f^{\Gamma_N} \text{ sur } \Gamma_N\}.$$

Alors le problème devient:

trouver $u \in L^2(\Omega)$, $\vec{p} \in Q^{f^{\Gamma_N}}$ tels que pour tout $\vec{q} \in Q^0$

$$\int_\Omega {}^t\vec{q}\,K^{-1}\,\vec{p}\,dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{g}({}^t\vec{q}\,\vec{n})({}^t\vec{p}\,\vec{n})\,d\sigma$$
$$+ \int_\Omega \mathrm{div}\vec{q}\,u\,dx$$
$$= \int_{\Gamma_0} {}^t\vec{q}\,\vec{n}\,u_0\,d\sigma + \int_{\Gamma_R}({}^t\vec{q}\,\vec{n})\frac{f^{\Gamma_R}}{g}d\sigma.$$

et pour tout $v \in L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{p}\,v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx.$$

Exemples: TETR M3T1, TRIA MT10,...

4. Calculs élémentaires

Dans le chapitre II, nous avions introduit plusieurs notations pour expliciter les formules élémentaires.

Nous notions

$$[P(x_1, \ldots, x_m)] = [p_1, p_2, \ldots, p_N]$$

et

$$[DP] = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial p_N}{\partial x_1} \\ & \ldots & \\ \frac{\partial p_1}{\partial x_m} & \ldots & \frac{\partial p_N}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Les formules élémentaires étaient les suivantes:

pour la masse

$$[M_T] = \int_T {}^t[P]\rho[P]\, dx,$$

pour la rigidité

$$[K_T] = \int_T {}^t[DP][K][DP]\,dx + \int_{\Gamma_R} {}^t[P]g[P]\,d\sigma,$$

pour le second membre

$$\{b_T\} = \int_T {}^t\,[P]f^\Omega\,dx + \int_{\Gamma_N} {}^t[P]f^\Gamma\,d\sigma,$$

pour le flux

$$\{\sigma_T\} = \int_\Gamma {}^t\cos(\vec{n},\vec{x}_i)[K][DP]\,d\sigma.$$

Nota Bene: les fiches techniques contiennent toutes les informations nécessaires à l'utilisation d'un élément fini, pour autant que nous connaissions la formulation variationnelle.

5. Interpolation

L'interpolation est l'étape où nous prenons en compte la description de l'E.F., le calcul des coordonnées des nœuds non sommets.

Précisons les termes

• *nœuds*: support des degrés de liberté,

• *point*: définit la géométrie,

• *élément droit*: élément dont les points sont les sommets; dans ce cas la transformation $F : \hat{T} \to T$ est $\mathcal{P}_1$ ou $\mathcal{Q}_1$,

• *élément courbe*: élément dont les points sont les sommets et d'autres points caractéristiques; nous sommes dans le cas d'éléments isoparamétriques.

Nota Bene: si les points caractéristiques (aussi nœuds) sont choisis au milieu des côtés, on retrouve l'élément droit.

Ainsi

élément droit: point=sommet, pas de calculs des coordonnées, pas de lignes courbes,

élément courbe: point=sommet ou point caractéristique, calcul des coordonnées sur les lignes courbes.

6. Données relatives aux tableaux élémentaires

En toute généralité les données à fournir sont:

pour $[M_T]$–ρ (et a_0),

pour $[K_T]$–$[K_{ij}]$, g,

pour $\{b_T\}$–f^Ω, f^Γ,

pour $\{\sigma_T\}$–$[K_{ij}]$,

évalués aux points d'intégration numérique. Les données sont rentrées soit **par numéro** de sous-domaines ou **de référence**, soit **par élément**.

À chaque fois, elles sont fournies pour

1. volume $\mathcal{V}$,
2. surface $\mathcal{S}$,
3. ligne $\mathcal{L}$,
4. point $\mathcal{P}$.

En utilisation conversationnelle, nous avons le choix dans les appels de programmes:

- COMAXX, FOMIXX, THELXX,
- COMAXX, THERCT.

L'ordre des données est décrit dans la fiche technique d'un élément fini.

Par convention, nous avons:

- masse, rigidité, second membre,

- si M_T n'est pas calculée, on ne fournit pas ρ.

Exemple Soit l'élément fini TRIA 2P2C.

Supposons avoir les données ρ, $[K]$, g constantes par sous-domaines. Nous déclarons un tableau réel simple précision contenant 5 valeurs, disons MILITAB contenant

$$\rho, \quad k_{11}, \quad k_{12}, \quad k_{22}, \quad g$$

Supposons avoir 2 seconds membres pour chaque T. Alors on donne

$$\text{point 1: } f^\Omega(1,x)\ f^\Omega(2,x)\ f^\Omega(1,y)\ f^\Omega(2,y)$$

$$\text{point 2: } f^\Omega(1,x)\ f^\Omega(2,x)\ f^\Omega(1,y)\ f^\Omega(2,y)$$

$$\cdots$$

$$\text{point 6: } f^\Omega(1,x)\ f^\Omega(2,x)\ f^\Omega(1,y)\ f^\Omega(2,y)$$

En général, les données sont faites par

- tableaux (méthode la plus simple),

- sous-programmes utilisateurs (il faut alors créer un nouvel exécutable).

7. Conditions aux limites

Les conditions aux limites essentielles sont données par

numéro de référence ou élément.

On fournit

no_réf incon_vari mnémonique valeur

La valeur de blocage est soit constante, soit fournie par une fonction.

Le traitement des conditions aux limites se fait en deux phases:

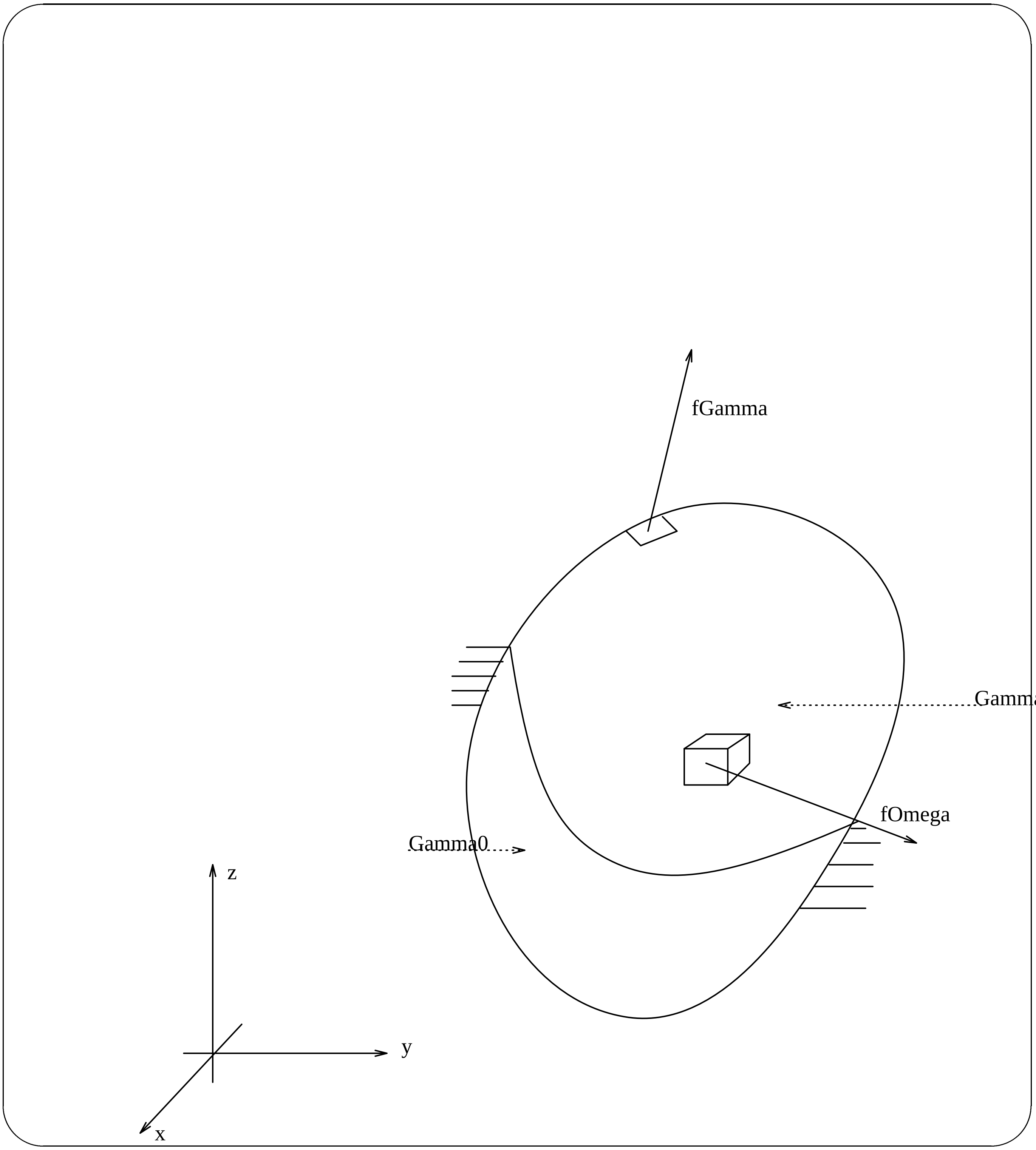
1. description par COBDXX ,
2. prise en compte par perturbation ou modification du système à résoudre.

IV.3. Le problème de l'élasticité linéaire

Soit Ω la région de l'espace occupée par la structure dans son état initial. On suppose que le milieu continu Ω est soumis à l'action de forces de volume de densité f^{Ω} et de forces de surface de densité f^{Γ} s'exerçant sur la partie Γ_1 de $\partial\Omega$. On suppose qu'une partie Γ_0 de $\partial\Omega$ est encastrée.

En élasticité bidimensionnelle, les problèmes traités sont les suivants: déformations, contraintes planes, plaques.

En élasticité tridimensionnelle, les problèmes traités concernent: les massifs et les coques.



Modulef-EF-26

1. Problème de l'élasticité (E.D.P.)

En terme d'équations aux dérivées partielles, le problème est le suivant. Trouver le déplacement $\vec{u}(t, x_1, x_2, x_3) = (u_1(), u_2(), u_3())$ et le tenseur des contraintes $(\sigma_{ij}(\vec{u}))$, $1 \leq i, j \leq 3$, tels que

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} &= f_i^{\Omega} \text{ dans } (0,T) \times \Omega \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j &= f_i^{\Gamma} \text{ sur } (0,T) \times \Gamma_1, \\ u_i &= u_{0i} \text{ sur } (0,T) \times \Gamma_0, \\ u_i(0,.) &= \overline{u_{0i}} \text{ sur } \Omega. \end{aligned}$$

$\vec{u}(t, x_1, x_2, x_3)$ est le déplacement au temps t du point courant (x_1, x_2, x_3). ρ est la densité volumique du matériau.

n_j est la composante de la normale unitaire extérieure à Γ_0.

$\vec{f}^{\Omega}$ est l'effort volumique appliqué à Ω et $\vec{f}^{\Gamma}$ est l'effort surfacique appliqué à Γ_1.

$\vec{u}_0$ est le déplacement imposé sur Γ_0.

$\vec{\overline{u_0}}$ est la condition initiale.

$\epsilon_{ij}(\vec{u})$ est le tenseur des déformations linéarisé symétrique de Green–Lagrange (hypothèse des petites déformations)

$$\epsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

σ_{ij} est le tenseur des contraintes. Le tenseur des contraintes est lié au tenseur des déformations par une loi de comportement.

Les lois de comportement.

Le tenseur des contraintes est lié au tenseur des déformations par la loi de comportement

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,h=1}^{3} E_{ijkh}\epsilon_{kh},$$

où E_{ijkh} désigne le tenseur d'élasticité. Ce tenseur satisfait aux propriétés de symétrie:

$$E_{ijkh} = E_{khij} = E_{jihk}.$$

Lorsque le milieu est homogène isotrope, la loi de comportement s'écrit en fonction des coefficients de Lamé λ et μ:

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

avec δ_{ij} le tenseur unité. En fait pour un milieu homogène isotrope il suffit de donner le module de Young E et le coefficient de Poisson ν.

Nous avons les relations bien connues

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

et

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

À la loi de comportement ci-dessus, il est possible d'ajouter la présence de contraintes initiales et un couplage thermique.

En présence de contraintes initiales, la loi de comportement devient

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,h=1}^{3} E_{ijkh}\epsilon_{kh} + \sigma_{ij}^{0},$$

où σ^0 est le tenseur des contraintes initiales.

En cas de couplage thermique (thermoélasticité), la loi de comportement devient

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,h=1}^{3} E_{ijkh}(\epsilon_{kh} - \epsilon_{kh}^{\theta}),$$

avec

$$\epsilon_{kh}^{\theta} = \alpha_{kh}(\theta - \theta_0),$$

où

- ϵ_{kh}^{θ} est le tenseur symétrique des déformations thermiques,
- α_{kh} est le tenseur des dilatations thermiques,
- θ est la température à l'instant t au point (x_1, x_2, x_3),
- θ_0 est la température à l'instant $t = 0$ au point (x_1, x_2, x_3).

En cas de couplage thermique avec contraintes initiales, la loi de comportement devient

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,h=1}^{3} E_{ijkh}(\epsilon_{kh} - \epsilon_{kh}^{\theta}) + \sigma_{ij}^{0}.$$

Nous avons donc les différents choix:

1. élasticité classique,
2. élasticité classique avec contraintes initiales,
3. thermo-élasticité,
4. thermo-élasticité avec contraintes initiales.

Remarques

• Pour les déformations planes, (N=2), il convient de faire les changements adéquats dans la loi de comportement.

• En rapport avec l'élasticité, on peut mentionner la possibilité de résoudre d'autres problèmes: problèmes de plaques, problèmes de coques,...

2. Formulation variationnelle

Nous nous intéressons à la formulation classique en déplacement pour fixer les notations.

Pour simplifier, nous analyserons le problème stationnaire pour $N = 3$. Le terme $\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ n'est pas considéré et la dépendance en temps est supprimée.

La variable d'espace (x_1, x_2, x_3) est aussi désignée par x.

Pour l'instant nous prenons une condition aux limites de Dirichlet u_{0i}, $i = 1, 2, 3$, sur Γ_0 et une condition aux limites de Neumann f_i^Γ, $i = 1, 2, 3$, sur Γ_1.

Nous introduisons l'ensemble

$$V^{u_0} = \{v; v_i \in H^1(\Omega), v_i = u_{0i} \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

La formulation s'écrit: trouver $u \in V^{u_0}$ tel que pour tout $v \in V^0$

$$\int_\Omega {}^t\{\epsilon(v)\}\{\sigma(u)\}\, dx = \int_\Omega {}^t\{v\}\{f^\Omega\}\, dx + \int_{\Gamma_1} {}^t\{v\}\{f^\Gamma\}\, d\sigma,$$

avec

$$\sigma_{ij}(u) = \sum_{k,h} E_{ijkh}\epsilon_{kh}(u).$$

Ici nous avons utilisé les notations suivantes:

$$\{v(x)\} = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix},$$

$$\{\epsilon(v(x))\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(v(x)) \\ \epsilon_{22}(v(x)) \\ \epsilon_{33}(v(x)) \\ 2\epsilon_{12}(v(x)) \\ 2\epsilon_{23}(v(x)) \\ 2\epsilon_{31}(v(x)) \end{pmatrix},$$

$$\{\sigma(u(x))\} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(u(x)) \\ \sigma_{22}(u(x)) \\ \sigma_{33}(u(x)) \\ \sigma_{12}(u(x)) \\ \sigma_{23}(u(x)) \\ \sigma_{31}(u(x)) \end{pmatrix}.$$

Remarques

• Ce choix est purement arbitraire, mais il apparaîtra utile pour la suite de la mise en œuvre.

• Nous distinguons d'autres formulations: axisymétriques, mixtes, hybrides primales, hybrides duales.

3. Quelques mots sur la mise en œuvre

Nous allons étudier comment passer de la formulation variationnelle à la programmation.

L'espace des déplacements est remplacé par $V_h^{u_0}$ et l'espace test est remplacé par V_h^0.

Les espaces approchés sont de type élément fini. Si X_h est l'espace défini par

$$X_h = \{w \in C^0(\Omega); w_{|T} \in P_T,\ \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

nous prenons

$$V_h^{u_0} = \{v_h \in X_h^3; v_{hi} = P_h u_{0i} \text{ sur } \Gamma_0\}$$

et

$$V_h^0 = \{v_h \in X_h^3; v_{hi} = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

Le problème approché prend la forme: trouver $u_h \in V_h^{u_0}$ tel que pour tout $v_h \in V_h^0$

$$\int_\Omega {}^t\{\epsilon(v_h)\}\{\sigma(u_h)\}\,dx = \int_\Omega {}^t\{v_h\}\{f^\Omega\}\,dx + \int_{\Gamma_1} {}^t\{v_h\}\{f^\Gamma\}\,d\sigma,$$

avec

$$\sigma_{ij}(u_h) = \sum_{k,\ell} E_{ijk\ell}\epsilon_{k\ell}(u_h).$$

Remarque

En pratique il est nécessaire d'utiliser des formules d'intégration numérique. Considérons la formule

$$\int_T \varphi(x)\,dx \simeq \sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell \varphi(b_\ell)$$

où L désigne le *nombre de points d'intégration*, ω_ℓ les *poids* et b_ℓ les *points* de la formule d'intégration.

Alors le problème approché est remplacé par

$$\forall v_h \in V_h^0 \quad a_h(u_h, v_h) = \mathcal{L}_h(v_h),$$

où

$$\begin{aligned}
a_h(u_h, v_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell=1}^{L} \omega_{\ell,T}(\sigma(u_h)\epsilon(v_h))(b_{\ell,T}) \\
\mathcal{L}_h(v_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell=1}^{L} w_{\ell,T}(f^{\Omega} v_h)(b_{\ell,T}) \\
&+ \sum_{\partial T \cap \Gamma_1 \neq \emptyset} \sum_{\ell=1}^{L'} w'_{\ell,T'}(f^{\Gamma} v_h)(b'_{\ell,T'}),
\end{aligned}$$

où T' représente l'intersection du bord de T avec Γ_1.

Pour développer les expressions de chaque terme apparaissant dans le problème discrétisé, nous utilisons les notations suivantes.

Nous posons

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{pmatrix} (v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} .$$

Sous forme condensée, nous pouvons écrire

$$\{\epsilon\}(v) = [\mathcal{D}] \left\{ \begin{array}{c} Dv_1 \\ Dv_2 \\ Dv_3 \end{array} \right\} = [\mathcal{D}]\{Dv\}.$$

Nous nous intéressons maintenant à la loi de comportement.

Soit $[E]$ la matrice donnée par

$$[E] = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ . & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ . & . & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ . & . & . & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ . & . & . & . & E_{55} & E_{56} \\ sym & . & . & . & . & E_{66} \end{pmatrix}.$$

Alors la loi de comportement prend la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} (v) = [E] \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{pmatrix}.$$

Pour un matériau isotrope homogène nous avons

$$\{\sigma\}(v) = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \kappa & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \{\epsilon\}(v)$$

avec $\kappa = \lambda + 2\mu$, ou encore

$$\{\sigma\}(v) = [E]\{\epsilon\}(v).$$

Revenons à la formulation variationnelle du problème approché.

Par souci de simplicité, nous négligeons les formules d'intégration numérique.

Le problème devient: trouver $u_h \in V_h^{u_o}$ tel que pour tout $v_h \in V_h^0$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega {}^t\{Dv_h\}^t[\mathcal{D}][E][\mathcal{D}]\{Du_h\}\,dx\\&= \int_\Omega {}^t\{v_h\}\{f^\Omega\}\,dx + \int_{\Gamma_1} {}^t\{v_h\}\{f^\Gamma\}\,d\sigma.\end{aligned}$$

Ici nous avons adopté la notation

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_{h1} \\ v_{h2} \\ v_{h3} \end{Bmatrix}.$$

Pour être complets, nous devons encore introduire les fonctions de base. Soit T un élément de la triangulation $\mathcal{T}_h$. La restriction de u_h à T prend la forme

$$\begin{aligned} u_{hj_{|T}}(x) &= \sum_{i=1}^{n_T} p_i(x) u_{hj}(a_i^T) \\ &= [p_1(x), \ldots, p_{n_T}(x)] \left\{ \begin{array}{c} u_{hj}(a_1^T) \\ \vdots \\ u_{hj}(a_{n_T}^T) \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

ou encore

$$u_{hj_{|T}}(x) = [p^T(x)]\{u_{hj}^T\}.$$

Ainsi nous avons

$$\{u_{h|T}\}(x) = \begin{pmatrix} p^T & 0 & 0 \\ 0 & p^T & 0 \\ 0 & 0 & p^T \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_{h1}^T \\ \\ u_{h2}^T \\ \\ u_{h3}^T \end{array} \right\}$$

ou bien

$$\{u_{h|T}\}(x) = [P^T]\{u_h^T\}.$$

Nous écrivons des expressions semblables pour les dérivées.
Pour $x \in T$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_{hj}}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial u_{hj}}{\partial x_2}(x) \\ \\ \frac{\partial u_{hj}}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial p_{n_T}}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial p_{n_T}}{\partial x_2}(x) \\ \\ \frac{\partial p_1}{\partial x_3}(x) & \dots & \frac{\partial p_{n_T}}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} \{u_{hj}^T\}$$

$$= [Dp^T(x)]\{u_{hj}^T\}.$$

Pour toutes les composantes du déplacement nous avons la formule suivante. Pour $x \in T$

$$\left\{\begin{array}{c} Du_{h1} \\ Du_{h2} \\ Du_{h3} \end{array}\right\}(x) = \begin{pmatrix} Dp^T & 0 & 0 \\ 0 & Dp^T & 0 \\ 0 & 0 & Dp^T \end{pmatrix}(x)\{u_h^T\}$$

$$= \ [DP^T(x)]\{u_h^T\}.$$

Alors le problème approché prend la forme :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T {}^t\{v_h^T\}^t[DP^T]^t[\mathcal{D}][E][\mathcal{D}][DP^T]\{u_h^T\}\, dx$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Big(\int_T {}^t\{v_h^T\}^t[P^T(x)]\{f^\Omega(x)\}\, dx$$

$$+ \int_{\Gamma_1 \cap \partial T} {}^t\{v_h^T\}^t[P^T(x)]\{f^\Gamma(x)\}\, d\sigma\Big).$$

La matrice de rigidité élémentaire est donnée par

$$[K^T] = \int_T {}^t[DP^T(x)]^t[\mathcal{D}][E][\mathcal{D}][DP^T(x)]\,dx.$$

Le second membre élémentaire est donné par

$$\begin{aligned}\{b^T\} &= \int_T {}^t[P^T(x)]\{f^\Omega(x)\}\,dx \\ &+ \int_{\Gamma_1\cap\partial T} {}^t[P^T(x)]\{f^\Gamma(x)\}\,d\sigma.\end{aligned}$$

Concernant les dimensions des matrices nous avons

$$\begin{array}{rl} [E] : 6\times 6 & [\mathcal{D}] : 6\times 9 \\ [DP^T] : 9\times 3n_T & [P^T] : 3\times 3n_T \\ \{f^\Omega\} : 3\times 1 & \{f^\Gamma\} : 3\times 1. \end{array}$$

Ainsi
$$[K^T] : 3n_T \times 3n_T \quad \text{et} \quad \{b^T\} : 3n_T \times 1.$$

Nota Bene. Jusqu'ici, nous avons une numérotation locale par élément. Pour sommer il est nécessaire d'introduire une numérotation globale.

Soit $\mathcal{B}^T$ la matrice booléenne, de dimension $3n_T \times 3n_g$, qui permet de passer de la numérotation globale à la numérotation locale. On a
$$\{u_h^T\} = \left\{ \begin{array}{c} u_{h1}(a_1^T) \\ \vdots \\ u_{h1}(a_{n_T}^T) \\ u_{h2}(a_1^T) \\ \vdots \\ u_{h3}(a_{n_T}^T) \end{array} \right\} = [\mathcal{B}^T]\{u_h\}.$$
Ainsi
$$\{u_h^T\} = [\mathcal{B}^T]\{u_h\}.$$

Finalement le problème approché est de la forme:

$$
\begin{aligned}
{}^t\{v_h\} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} {}^t[\mathcal{B}^T][K^T][\mathcal{B}^T] \right) \{u_h\} \\
= {}^t\{v_h\} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} {}^t[\mathcal{B}^T]\{b^T\} \right).
\end{aligned}
$$

4. Quelques compléments

Calcul des contraintes

Dans la formulation en déplacement, les contraintes sont obtenues en injectant la solution au niveau des calculs élémentaires.

Soit $x \in T \in \mathcal{T}_h$; alors

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} (u_h)(x) &= \{\sigma\}(u_h)(x) \\
&= [E][\mathcal{D}]\{Du_h\}(x) \\
&= [E][\mathcal{D}][DP^T(x)]\{u_h^T\} \\
&= [\sigma^T][\mathcal{B}^T]\{u_h(\text{global})\}.
\end{aligned}$$

Nota Bene. Il est bien sûr préférable de calculer les contraintes avec la formule

$$\{\sigma\}(u_h)(x) = [E][\mathcal{D}][DP^T(x)]\{u_h^T\}.$$

Après quoi, nous pouvons calculer sur chaque élément les valeurs et vecteurs propres de

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & & \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

pour les critères des directions principales et de Treska.

Les conditions aux limites(N=2)

Partons de l'équation

$$-\mathrm{div}\,\sigma = f^{\Omega}$$

ou bien

$$-\int_{\Omega} \mathrm{div}\,\sigma\, v\, dx = \int_{\Omega} f^{\Omega}\, v\, dx,$$

où v est une fonction test. En intégrant par parties nous avons

$$\int_{\Omega} \sigma\, \epsilon(v)\, dx - \int_{\partial\Omega} (\sigma\, n)\, v\, d\sigma = \int_{\Omega} f^{\Omega}\, v\, dx.$$

Analysons le terme

$$\int_{\partial\Omega} (\sigma\, n)\, v\, d\sigma$$

ou bien

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij}\, n_j \right) v_i\, d\sigma.$$

Nous pouvons encore développer

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\sigma\, n)\, v\, d\sigma \;&=\; \int_{\partial\Omega} (\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2)\, v_1\, d\sigma \\ &+\; \int_{\partial\Omega} (\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2)\, v_2\, d\sigma \end{aligned}$$

Nous pouvons donc avoir différents types de conditions aux limites sur une partie du bord de Ω:

- imposer u_i et laisser libre $\sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2$,
- laisser libre u_i et imposer $\sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2$.

Avec Modulef, il est possible d'introduire ces différents types de conditions aux limites en prenant soin d'utiliser suffisamment de numéros de référence.

Nous avons travaillé dans le système de coordonnées $(O; e_1, e_2)$.

Considérons le repère local $(O_{loc}; \tau, n)$.

Alors

$$\begin{aligned} \sigma\, n &= [(\sigma\, n)n]n + [(\sigma\, n)\tau]\tau \\ &= \sigma_{nn} n + \sigma_{n\tau}\tau \end{aligned}$$

et

$$v = v_n n + v_\tau \tau.$$

Ainsi nous pouvons développer

$$\begin{aligned} [\sigma\, n]v &= (\sigma_{nn} n + \sigma_{n\tau}\tau)(v_n n + v_\tau \tau) \\ &= \sigma_{nn} v_n + \sigma_{n\tau} v_\tau. \end{aligned}$$

Il vient

$$\int_\Gamma [\sigma\, n] v\, d\sigma = \int_\Gamma \left\{\sigma_{nn} v_n + \sigma_{n\tau} v_\tau\right\}\, d\sigma.$$

Nous distinguons les cas de figure suivants:

$$\sigma_{nn} \text{ libre } u_n \text{ imposé } \begin{cases} \sigma_{n\tau} \text{ libre } u_\tau \text{ imposé,} \\ \sigma_{n\tau} \text{ imposé } u_\tau \text{ libre,} \end{cases}$$

$$\sigma_{nn} \text{ imposé } u_n \text{ libre } \begin{cases} \sigma_{n\tau} \text{ libre } u_\tau \text{ imposé,} \\ \sigma_{n\tau} \text{ imposé } u_\tau \text{ libre.} \end{cases}$$

Il est possible d'introduire ces différents types de conditions aux limites avec Modulef. Pour ce faire, on utilise les **CLRL**, (conditions aux limites en relation linéaire).