Chapitre II

Un problème modèle

de la thermique

Nous utilisons Modulef sous forme conversationnelle. Pour bien comprendre comment créer les fichiers de commandes et enchaîner les modules, il est nécessaire de revenir à la formulation variationnelle.

Nous allons aborder

1. la formulation variationnelle
2. l'approximation par E.F. en suivant les notations de Modulef
3. la terminologie Modulef
4. l'enchaînement des étapes (modules ou programmes)
5. un exemple

II.1. Le problème physique

Nous nous intéressons à un problème de la chaleur stationnaire. Nous ne présentons pas ici le modèle physique.

II.2. Le problème mathématique

On s'intéresse au problème de trouver $u : \Omega \to \mathcal{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f \quad \mathrm{dans}\, \Omega, \\ u = u_0 \quad \mathrm{sur}\, \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \mathrm{sur}\, \Gamma_N. \end{cases}$$

Ici nous prenons Ω un ouvert régulier du plan de frontière $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

Nous supposons que

$$\begin{aligned} f &\in L^2(\Omega), \\ u_0 &\in H^{1/2}(\Gamma_D), \\ g &\in H^{-1/2}(\Gamma_N), \\ a &\in L^\infty(\Omega), \quad a \geq 0. \end{aligned}$$

Le problème ci-dessus est résolu par une méthode d'éléments finis.

Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire une formulation variationnelle.

Soit l'espace

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma v_{|\Gamma_D} = 0\}.$$

Problème.

Trouver une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} \forall\, v \in V \qquad & \int_\Omega \{\nabla u\, \nabla v + auv\}\; dx \\ &= \int_\Omega f v\, dx + \int_{\Gamma_N} g(\gamma v_{|\Gamma_N})\, d\sigma, \\ \gamma u &= u_0 \quad \text{sur}\, \Gamma_D. \end{aligned}$$

Cette formulation est le point de départ de la méthode des éléments finis.

Remarque.

L'étude théorique du problème ci-dessus a fait l'objet du cours ANEDP.

II.3. Approximation par éléments finis

Soit $V_h \subset H^1(\Omega)$ un sous-espace de dimension finie et $P_h : H^1(\Omega) \to V_h$ un opérateur de projection sur V_h. On note

$$V_{0h} = V_h \cap V.$$

Le problème (P) est approché par:

Problème approché

Trouver une fonction $u_h \in V_h$ telle que

$$\begin{aligned} &\forall\, v \in V_{0h} \quad \int_\Omega \{\nabla u_h \, \nabla v + a u_h v\} \, dx \\ &\quad = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_N} g(\gamma v_{|\Gamma_N}) \, d\sigma, \\ &\quad \gamma u_h = P_h u_0 \quad \text{sur}\, \Gamma_D. \end{aligned}$$

Nous allons bien sûr considérer V_h **sous-espace de type élément fini**.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ à l'aide de triangles T dont le diamètre est inférieur à h pour tout T,

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T.$$

De façon classique nous prenons alors

$$V_h = \{v : \Omega \to \mathcal{R}; v_h \in C^0(\overline{\Omega}), v_{h|T} \in \mathcal{P}_k\}.$$

Ici $\mathcal{P}_k$ est l'espace des polynômes de degré $\leq k$.

Attention: Une première difficulté apparaît si Ω n'est pas polygonal. Il faut introduire des triangles courbes ou (et) approcher $\overline{\Omega}$ par $\overline{\Omega_h}$.

Remarque. Les éléments finis que nous allons utiliser dans Modulef sont des éléments finis **isoparamétriques**.

Nous allons écrire le problème approché de façon plus détaillée en utilisant des notations proches de celles utilisées dans Modulef.

Nous introduisons les notations suivantes.

• $\dim V_h = \tilde{N}$ le nombre total de *degrés de liberté.*

• $\vec{u} = {}^t(u_1, \ldots, u_{\tilde{N}}) \in \mathcal{R}^{\tilde{N}}$ *l'inconnue.*

• $\vec{u}_T = {}^t(u_1^T, \ldots, u_N^T) \in \mathcal{R}^N$ la *valeur de l'inconnue aux degrés de liberté* de l'élément T.

• L'application

$$B_T : \mathcal{R}^{\tilde{N}} \to \mathcal{R}^N$$

relie $\vec{u}$ à $\vec{u}_T$.

Elle permet de passer de la numérotation globale à la numérotation locale. On a

$$\vec{u}_T = B_T \vec{u}.$$

• $\tilde{N}_D$ est le nombre de *degrés de liberté sur* Γ_D*.* On note $\tilde{\imath} \in \tilde{N}_D$ si le degré de liberté $\tilde{\imath}$ est sur Γ_D; on note $\tilde{\imath} \in \tilde{N} - \tilde{N}_D$ sinon.

Soit $\{w_{\tilde{\imath}}, \tilde{\imath} = 1, \ldots, \tilde{N}\}$ la base de V_h telle que

$$w_{\tilde{\imath}}(\tilde{\jmath}) = \delta_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \sum_{\tilde{\imath} \in \tilde{N}} u_h(x_{\tilde{\imath}}) w_{\tilde{\imath}}(x) \\ &= \sum_{\tilde{\imath} \in \tilde{N} - \tilde{N}_D} u_h(x_{\tilde{\imath}}) w_{\tilde{\imath}}(x) \\ &\qquad + \sum_{\tilde{\imath} \in \tilde{N}_D} P_h u_0(x_{\tilde{\imath}}) w_{\tilde{\imath}}(x). \end{aligned}$$

Soit $p_1, \ldots, p_N$ les polynômes de base de l'élément T. Alors

$$u_{h|T}(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i^T p_i(x).$$

En utilisant les notations introduites précédemment nous avons

$$\begin{aligned} \nabla u_h &= \nabla\{(p_1(x), \ldots, p_N(x)) B_T \vec{u}\} \\ &= DP\, B_T\, \vec{u}, \end{aligned}$$

avec DP donné par

$$DP = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial p_N}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial p_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial p_N}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Nous notons encore

$$P = (p_1(x), \ldots, p_N(x)).$$

Alors

$$u_{h|T}(x) = P\, B_T\, \vec{u}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_h \, \nabla v_h \, dx &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \, \nabla v_h \, dx \\ &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T {}^t(DP\, B_T\, \vec{v})(DP\, B_T\, \vec{u})\, dx \\ &= {}^t\vec{v} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^tB_T \int_T {}^tDP\, DP\ dx\, B_T\, \vec{u}.\end{aligned}$$

D'où nous tirons l'expression

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u_h \, \nabla v_h \, dx + \int_\Omega a u_h v_h \, dx \\ &= {}^t\vec{v} \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^tB_T \int_T \left\{ {}^tDP\, DP + a\, {}^tP\, P \right\}\, dx B_T \vec{u} \right).\end{aligned}$$

Le second membre devient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f v_h \, dx + \int_{\Gamma_N} g v \, d\sigma \\ &= {}^t\vec{v} \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^tB_T \left\{ \int_T {}^tP\, f\, dx + \int_{\partial T\cap\Gamma_N} {}^tP\, g\, d\sigma \right\} \right).\end{aligned}$$

Finalement le problème approché peut être écrit sous la forme suivante.

Trouver $\vec{u}$ tel que

$$u_{\tilde{\imath}} = P_h u_0(x_{\tilde{\imath}}) \quad \tilde{\imath} \in \tilde{N}_D$$

et pour tout $\vec{v}$, $v_{\tilde{\imath}} = 0 \quad \tilde{\imath} \in \tilde{N}_D$,

$$\begin{aligned}{}^t\vec{v}\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^tB_T \int_T \left\{{}^tDP\, DP + a\,{}^tP\, P\right\} dx B_T\vec{u}\right) &= \\ {}^t\vec{v}\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} {}^tB_T \left\{\int_T {}^tP\, f\, dx + \int_{\partial T\cap\Gamma_N} {}^tP\, g\, d\sigma\right\}\right).\end{aligned}$$

Bien sûr le problème peut être écrit sous la forme

$$A\vec{u} = \vec{b}.$$

Nota Bene

En fait le problème approchée est un problème général. Il ne dépend pas de Modulef. Nous n'avons qu'utilisé des notations voisines de celles de Modulef.

Le problème de la thermique classique est complètement résolu par Modulef. Pour un certain nombre d'éléments nous pouvons évaluer les quantités suivantes.

La matrice élémentaire de rigidité (raideur)

$$K_T = \int_T {}^tDP\, k\, DP\, dx + \int_{\partial T \cap \Gamma_R} {}^tP\, h\, P\, d\sigma,$$

où sur Γ_R, partie de $\partial\Omega$, on impose une condition du type Robin.

La matrice élémentaire de masse

$$M_T = \int_T {}^tP\, \rho\, P\, dx.$$

Le second membre élémentaire

$$b_T = \int_T {}^tP\, f\, dx + \int_{\partial T \cap \Gamma_N} {}^tP\, g\, d\sigma.$$

Nous avons dans notre exemple modèle **les données** particulières suivantes.

La conductivité thermique k vaut

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

le coefficient de transfert thermique h vaut

$$h = 0,$$

la densité ρ vaut

$$\rho = a, \text{ avec } a \text{ réel positif.}$$

Le second membre est donné par f et g.

À l'aide des notations ci-dessus le problème approché prend la forme suivante.

Trouver $\vec{u}$ tel que

$$u_{\tilde{\imath}} = \text{quelque chose de donné} \quad \tilde{\imath} \in \tilde{N}_D$$

et pour tout $\vec{v}$, $v_{\tilde{\imath}} = 0 \quad \tilde{\imath} \in \tilde{N}_D$,

$$\begin{aligned} {}^t\vec{v} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} {}^tB_T (K_T + aM_T) B_T \vec{u} \right) = \\ {}^t\vec{v} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} {}^tB_T b_T \right). \end{aligned}$$

Partant des matrices K_T et M_T nous voulons construire A la matrice du système.

On effectue alors l'assemblage. Pour cela nous pouvons utiliser 2 méthodes.

1. Nous évaluons

$$A = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} {}^t B_T (K_T + a M_T) B_T.$$

2. Nous évaluons

$$A = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} {}^t B_T K_T B_T + a \sum_{T \in \mathcal{T}_h} {}^t B_T M_T B_T.$$

Ces formules sont identiques d'un point de vue mathématique, mais elles sont différentes pour la programmation.

Pour avoir un problème matriciel bien posé, il faut encore prendre en compte les **conditions aux limites**.

Les étapes d'un calcul sont:

1. Maillage.

2. Choix d'un élément fini.

3. Données pour le calcul des matrices et seconds membres élémentaires.

4. Calculs élémentaires.

5. Prise en compte des C.L.

6. Assemblage.

7. Résolution du système.

8. Présentation des résultats.

II.4. Terminologie Modulef

Inconnue variationnelle: inconnue du problème continu.

Degré de liberté: inconnue du problème discret.

Mnémonique: symbole attaché à un D.L. pour le définir. VN signifie valeur au nœud, DX signifie la dérivée relativement à x.

Nœud: support de degré de liberté.

Point: point de l'espace définissant la géométrie.

Numéro de sous-domaine: numéro permettant de distinguer les matériaux différents.

Numéro de référence: numéro pour distinguer les frontières (surface S, ligne L, point P).

Nota Bene: les numéros de sous-domaine et de référence servent au **traitement par lots**. Il faut prévoir des numéros permettant un tel traitement.

II.5. Les programmes dans Modulef

Chaque étape de calcul peut être schématisée ainsi:

S.D.E.$\rightarrow$ Module ou PPAL $\rightarrow$ S.D.S.

Le nom d'un programme principal se termine généralement par un **xx**.

Un programme principal est appelé avec un fichier contenant les données:

LE FICHIER DE COMMANDES.

Le fichier de commandes est un fichier ASCII qu'il est possible d'éditer avec l'éditeur de son choix.

1. Le maillage

Un maillage doit respecter les propriétés usuelles d'un maillage E.F.

- $T_i \cap T_j =$ vide ou sommet ou arête,

- les angles ne sont pas trop grands.

Nota Bene: la mise en œuvre d'un mailleur n'est pas aisée. Modulef contient plusieurs mailleurs performants.

En utilisation conversationnelle, l'appel d'un mailleur 2D se fait par le programme **apnoxx**,

$$\emptyset \rightarrow \textbf{apnoxx} \rightarrow \text{TEST.NOPO.}$$

On doit préciser en particulier: les points, les lignes, les sous-domaines et le mailleur. Il peut exister une S.D. d'entrée, qui est une NOPO que l'on aurait créé préalablement par exemple.

Pour visualiser un S.D. NOPO, on utilise le programme **trnoxx**.

2. L'interpolation

Dans l'étape interpolation, il s'agit de choisir l'élément fini. Les éléments pour résoudre un problème de thermique ou d'élasticité sont distingués.

Ils sont rangés dans les bibliothèques THER et ELAS. Chaque élément fini est décrit par une *fiche technique*.

En utilisation conversationnelle, l'appel d'un élément fini se fait par le programme **comaxx**,

TEST.NOPO → **comaxx** →
→ TEST.COOR, TEST.MAIL

3. Les données physiques

Nous allons préciser les données nécessaires aux calculs élémentaires, c'est-à-dire pour le calcul des quantités

$$K_T, \quad M_T, \quad b_T.$$

Il s'agit d'introduire des valeurs pour

$$k, h, \rho, f, g.$$

Ces quantités peuvent être données par sous-domaines. Elles peuvent être données *par valeur* (dans un tableau) ou *par subroutine*.

En utilisation conversationnelle, la physique est donnée par le programme **fomixx**,

$$\emptyset \rightarrow \textbf{fomixx} \rightarrow \text{TEST.FORC, TEST.MILI.}$$

4. Calculs élémentaires

Il s'agit de l'étape où les quantités

$$K_T, \quad M_T, \quad b_T$$

sont effectivement calculées pour chacun des éléments.

En utilisation conversationnelle, les calculs élémentaires sont effectués par le programme **thelxx**,

TEST.MAIL, TEST.MILI, TEST.FORC,
TEST.COOR → **thelxx** →
→ TEST.TAE.

On peut visualiser une S.D. (le fichier binaire) à l'aide de l'utilitaire **imagxx**.

5. Prise en compte des C.L.

Il s'agit de l'étape où nous imposons les conditions aux limites essentielles.

En utilisation conversationnelle, nous pouvons imposer des conditions aux limites par le programme **cobdxx**,

$$\text{TEST.MAIL, TEST.COOR} \rightarrow$$
$$\rightarrow \textbf{cobdxx} \rightarrow \text{TEST.BDCL}$$

Il y a plusieurs méthodes pour prendre en compte les C.L. La méthode de pénalisation est utilisée dans Modulef. Elle utilise la propriété

$$\mathrm{VTG} + a \simeq \mathrm{VTG}.$$

Sous cette forme, il s'agit en fait d'une mauvaise méthode car elle détériore le nombre de condition de la matrice. On préfère annuler la ligne sauf le terme diagonal.

Dans Modulef, il est possible d'imposer des **CLRL**, c'est-à-dire de donner des conditions aux limites en relation linéaire.

6–7. Assemblage et résolution

Il s'agit de la phase où les matrices et seconds membres élémentaires sont assemblés et où le système est résolu.

Le type de stockage dépend bien sûr de la méthode de résolution. Pour les méthodes directes, nous utilisons un stockage profil avec la **S.D. MUA.** Pour les méthodes itératives, on utilise un stockage de type Morse avec la **S.D. AMAT.**

En utilisation conversationnelle, l'assemblage et la résolution (Cholesky) sont effectués par le programme **cholxx**,

TEST.TAE, TEST.BDCL,
TEST.MAIL → **cholxx** →
→ TEST.B.

8. Présentation des résultats

En utilisation conversationnelle, la visualisation des résultats sur écran ou sur fichier postscript peut être faite par le programme **trmcxx**.

On fournit au programme **trmcxx**, les S.D.

$$TEST.MAIL, TEST.COOR, TEST.B.$$

On utilise le programme **trmcxx** de façon analogue à **trnoxx** au moyen d'un menu. Il est possible de comparer la S.D. B avec la solution exacte.

II.6. Un exemple avec commandes

Soit Ω le domaine présenté au chapitre précédent. Sur ce domaine nous allons résoudre le problème au limite suivant: trouver une fonction Φ telle que

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta\Phi & = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \Phi & = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_4 \cup \Gamma_1, \\ \Phi & = x_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1} & = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Nous donnons ci-après les fichiers de commandes utilisés pour la résolution du problème à l'aide de Modulef.

Fichier de commande apno.data

```
'CERCLE                                                                    '
'POINT                                                                     '
     1     4                           $ IMPRE NPOINT  $
$   NOP   NOREF(NOP)     X(NOP).           Y(NOP).  $
     1       1         0.000000E+00     0.500000E+00
     2       1         0.500000E+00     0.000000E+00
     3       1         0.250000E+01     0.000000E+00
     4       2         0.000000E+00     0.250000E+01
'LIGN                                                                      '
     1     4                           $ IMPRE  NDLM   $
$   NOLIG NOELIG NEXTR1 NEXTR2 NOREFL NFFRON       RAISON $
       1     11      2      3      4      0     0.150000E+01
       2     11      3      4      2     -2     0.100000E+01
       3     11      4      1      3      0     0.666666E+00
       4     11      2      1      1     -2     0.150000E+01
'TRIA                                                                      '
     1     0     1     4     1         $ IMPRE NIVEAU NUDSD NBRELI NPROPA
 $ LISTE DES LIGNES DU CONTOUR :
     1     2     3     4
     1     0     0                       $ NCOMP NBRINT IOPT $
     4                                 $ COMPOSANTE $
'SAUV                                                                      '
     1     0     0                       $ IMPRE NINOPO NTNOPO
 NOP1.RES                              $ NOM FICHIER
'FIN                                                                       '
```

Fichier de commande coma.data

```
    0                                   $ Y A T IL DES FONCTIONS INTERPRETEES
    2     1     0                       $ NDIM   NDSD   NBSDC
    4     0                             $ NNR    NBLC
THER                                    $ NOM DE LA BIBLIOTHEQUE
    1                                   $ NTYED DU SD      1
TRIA 2P1D                               $ LE NOM DES ELEMENTS DROITS
    0                                   $ NTYEC DU SD      1
NOP1.RES                                $ NOM DU FICHIER
     0                                  $     ET NIVEAU DE LA SD NOPO
MAIL.RES                                $ NOM DU FICHIER
     0                                  $     ET NIVEAU DE LA SD MAIL
COOR.RES                                $ NOM DU FICHIER
     0                                  $     ET NIVEAU DE LA SD COOR
    0     0                             $ NTMAIL  NTCOOR
```

Fichier de commande fomi.data

```
'                                                                     '
 FORC.RES                              $ NOM DU FICHIER DE LA S.D FORC
     0     0                           $ SON NIVEAU ET NB DE SES TAB. ASSOCIES
 MILI.RES                              $ NOM DU FICHIER DE LA S.D MILI
     0     1                           $ SON NIVEAU ET NB DE SES TAB. ASSOCIES
 $  DONNEES RELATIVES A LA S.D. FORC  $
     1                                  $ NDSM
     0     0     0     0     0     0     0     0
 $  DONNEES RELATIVES A LA S.D. MILI  $
  MILI       2       1                  $ NOM TYPE NBREMOT
  0.100000e+01                          $ MILI(  1)
  ' MILIEU = COEFF LAPLACIEN                                        '  $ CONTENU
     0     1     0     0     0     0     0     0
     1     0     1     1                $ NOSD NFRO NOPT ITRAIT
MILI     1                              $ NTABL IADR
```

Fichier de commande thel.data

```
MAIL.RES                              $ NOM DU FICHIER
    1                                 $     ET NIVEAU DE LA SD MAIL
COOR.RES                              $ NOM DU FICHIER
    1                                 $     ET NIVEAU DE LA SD COOR
TAE.RES                               $ NOM DU FICHIER
    1                                 $     ET NIVEAU DE LA SD TAE
    0                                 $ NTTAE
    0                                 $ 1 SI POBA EST UTILISEE , 0 SINON
    1                                 $ 1 SI MILI EST UTILISEE , 0 SINON
MILI.RES                              $ NOM DU FICHIER
    1                                 $     ET NIVEAU DE LA SD MILI
    1                                 $ 1 SI FORC EST UTILISEE , 0 SINON
FORC.RES                              $ NOM DU FICHIER
    1                                 $     ET NIVEAU DE LA SD FORC
    1                                 $ NPROV
    0     1     1     0               $ IOPT(*)
:RIE     0                            $ NOM DU TABLEAU DES CL ET NOMBRE DE CL
```

Fichier de commande cobd.data

```
 MAIL.RES                              $ NOM DU FICHIER
    35                                 $     ET NIVEAU DE LA SD MAIL
 BDCL.RES                              $ NOM DU FICHIER
    35                                 $     ET NIVEAU DE LA SD BDCL
     0                                 $ NTBDCL
     2     3     2                     $ ICONST  NBFR  NTYP
     1     1  VN                       $ REF   INC.VARIATIONNELLE  MNEMO
     4     1  VN                       $ REF   INC.VARIATIONNELLE  MNEMO
     2     1  VN                       $ REF   INC.VARIATIONNELLE  MNEMO
     1                                 $ 1 SI FONCTIONS INTERPRETEES
 COOR.RES                              $ NOM DU FICHIER
    35                                 $     ET NIVEAU DE LA SD COOR
     0                                 $ 1 SI SD COOR DES NOEUDS
     3              $ NOMBRE DE FONCTIONS
  VALCLR01(X,Y,Z)=
       0*X;
  VALCLR02(X,Y,Z)=
       0*X;
  VALCLR03(X,Y,Z)=
       Y;
FIN
     0                                 $ 1 SI SD NDL1
     0               $ 1 SI CL EN RL A LA MAIN ; -1 SI CL EN RL PAR SP
```

Fichier de commande chol.data

```
MAIL.RES                                  $ NOM DU FICHIER
    1                                     $     ET NIVEAU DE LA SD MAIL
    1     2     1                         $ NDSM  NTYP  ND
TAE.RES                                   $ NOM DU FICHIER
    1                                     $     ET NIVEAU DE LA SD TAE
    1                                     $ 1 SI BDCL EST UTILISE , 0 SINON
BDCL.RES                                  $ NOM DU FICHIER
    1                                     $     ET NIVEAU DE LA SD BDCL
    0                                     $ 1 SI CL. EN RL. EXISTE
B.RES                                     $ NOM DU FICHIER
    1                                     $     ET NIVEAU DE LA SD B
    5                                     $ IMPREB
```